Zur Streutheorie für kurzreichweitige Verunreinigungen in eindimensionalen Kristallen

Thomas Kaminski

September 1992

Diplomarbeit

im Fach Physik
an der

Technischen Universität Berlin

Inhalt

1. Einleitung

Thema dieser Arbeit ist die Streutheorie für kurzreichweitige Verunreinigungen in eindimensionalen Kristallen. Das vorliegende Problem kann mit Hilfe der nichtrelativistischen Quantenmechanik untersucht werden. Hier ist die Dynamik eines Systems über die Schrödingergleichung durch seinen Hamiltonoperator bzw. die von ihm erzeugte unitäre Gruppe bestimmt. Das grundlegende Konzept der Streutheorie besteht im Vergleich der vorliegenden Dynamik mit einer (im allgemeinen) einfacheren Dynamik, der sogenannten freien Dynamik. Der Streuvorgang wird beschrieben durch die Wellenoperatoren

$$\Omega^{\pm} := \underset{t \to \pm\infty}{s\text{-}lim}\; e^{iHt} e^{-iH_0 t} P^0_{ac}$$

bzw. durch den Streuoperator $S := \Omega^{+}\Omega^{-*}$. Die Symbole H und H_0 sollen die Hamiltonoperatoren für die gegebene und die freie Dynamik bezeichnen sowie P^0_{ac} den Projektor auf den bzgl. H_0 absolutstetigen Teilraum des zugrundeliegenden Hilbertraumes. Hier stellt sich die Frage, ob obige Objekte wohldefiniert sind, d.h. es sind die Existenz und die Vollständigkeit der Wellenoperatoren zu untersuchen, wobei man die Wellenoperatoren als vollständig bezeichnet genau dann, wenn gilt

$$Ran\ \Omega^{+} = Ran\ \Omega^{-} = Ran\ P^0_{ac}.$$

Ein naheliegendes Anwendungsfeld für die Streutheorie sind Zweikörperprobleme. Nach geeigneter Koordinatentransformation kann man die Dynamik eines Zweikörpersystems beschreiben als Bewegung des einen Teilchens im vom anderen Teilchen erzeugten Potential V. Die zu untersuchende und die freie Dynamik sind also hier durch die formalen Hamiltonoperatoren $H := -\Delta + V$ bzw. $H_0 := -\Delta$ bestimmt. Derartige Probleme sind einer Untersuchung gut zugänglich, zum einen weil die freie Dynamik sehr gut studiert ist und zum anderen weil H_0 ein rein absolutstetiges Spektrum hat, so daß die Wellenoperatoren auf dem ganzen Hilbertraum definiert sind. Es sind hier viele Klassen von Potentialen untersucht worden; einen Überblick geben Simon [S] und Reed/Simon [R/S].

Ein weiteres für die Anwendung der Streutheorie interessantes System besteht aus einem Teilchen in einem unendlich ausgedehnten Kristall, der an einer Stelle verunreinigt ist. Dieses Modell ist zum Beispiel geeignet, das Verhalten eines Elektrons an einer Störstelle im Halbleiter zu beschreiben. In geeigneten Koordinaten kann die Dynamik aufgefaßt werden als Bewegung des Teilchens in einem Potential $V+Q$, wobei V das periodische Potential des Festkörpers und Q das Potential der Verunreinigung bezeichnet. Die zu untersuchende und die freie Dynamik sind hier durch die formalen Hamiltonoperatoren $H := -\Delta + V + Q$ und $H_0 := -\Delta + V$ bestimmt. Anders als beim vorher betrachteten Problem ist hier der Operator H_0 weniger gut studiert, so daß häufig vor der Untersuchung der Wellenoperatoren eine Analyse des Operators H_0 notwendig ist. Zu Streuproblemen dieser Art gibt es Arbeiten von Thomas [T] und Bentosela [B]. Beide betrachten das dreidimensionale Problem mit einem periodischen Potential[1] $V \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$. Thomas zeigt die Existenz und Vollständigkeit der Wellenoperatoren bei Störungen Q, für die

$$|Q|^{\frac{1}{2}}(1-\Delta)^{-1}$$

ein Hilbert-Schmidt-Operator ist. Bentosela gibt neben dem Beweis von Existenz und Vollständigkeit der Wellenoperatoren eine Eigenfunktionsentwicklung an, wobei er Potentiale $Q \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$ betrachtet, die mit geeignetem $\epsilon > 0$ im Unendlichen wie $r^{-(2+\epsilon)}$ abfallen. Beim Beweis der Existenz und Vollständigkeit der Wellenoperatoren verwenden beide Autoren abstrakte Methoden, die von Kato und Birman für sogenannte Spurklassestörungen entwickelt wurden. Angeblich wurde auch in der Schule von Birman auf diesem Gebiet gearbeitet.

In der vorliegenden Arbeit wird das eindimensionale Problem mit $V \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ und $Q \in L^1(\mathbb{R})$ untersucht.

Im dritten Kapitel geht es darum, für die Operatoren H_0 und H je eine selbstadjungierte Realisierung in $L^2(\mathbb{R})$ zu definieren. Die schwachen Bedingungen an die Potentiale V und Q machen es notwendig, hierbei auf Formtechniken zurückzugreifen.

Der Operator H_0 wurde bereits in meiner Studienarbeit untersucht. Als Voraussetzung für eine etwas elegantere Analyse wurde im vierten Kapitel eine Darstellung von H_0 als direktes Integral über eine Familie von Faseroperatoren konstruiert. Auch hier müssen Formtechniken angewandt werden.

Im fünften Kapitel werden zunächst die Faseroperatoren untersucht, wobei die entscheidenden Aussagen (Lemma 5.1 und Satz 5.2) im wesentlichen aus der

[1] Die Bezeichnungen insbesondere der Funktionenräume sind in Kapitel 2 erläutert.

Studienarbeit übernommen sind. Die Analyse von H_0 ergibt schließlich ein rein absolutstetiges Bandspektrum.
Im sechsten Kapitel werden die analytischen Grundlagen erarbeitet, um die L^1-Störung Q zu kontrollieren. Es werden Eigenlösungen für die Differentialoperatoren H_0 und H konstruiert, wobei die Eigenlösungen für H aus denen von H_0 als Lösungen von geeigneten Volterra-Integralgleichungen gewonnen werden. Mit den Eigenlösungen können schließlich die Resolventen für die Operatoren H_0 und H konstruiert werden.
Im siebenten Kapitel werden die zentralen Gleichungen der zeitunabhängigen Streutheorie, die Lippman-Schwinger-Gleichungen, untersucht. Für deren Lösungen gelingt eine Eigenfunktionsentwicklung. Ein Ergebnis der Eigenfunktionsentwicklung sind Aussagen über das Spektrum von H: Im Inneren der Bänder gibt es ein rein absolutstetiges Spektrum, es können zwischen den Bändern oder an deren Rand Eigenwerte auftauchen, während ein singulärstetiges Spektrum ausgeschlossen werden kann.
Im letzten Kapitel werden mit Hilfe der oben erwähnten Methoden von Kato und Birman die Existenz und die Vollständigkeit der Wellenoperatoren gezeigt. Am Ende gelingt es, eine Darstellung der Wellenoperatoren und damit des Streuoperators über die Eigenfunktionsentwicklung zu erhalten.
Anzumerken ist, daß der wesentliche Aufwand nicht im Beweis der Existenz und Vollständigkeit der Wellenoperatoren bestand, sondern in der Konstruktion einer Darstellung der Wellenoperatoren. Dabei ist für das Störpotential die Integrierbarkeit eine unerläßliche Bedingung.

Ich möchte mich bei Prof. Dr. Hellwig für das Zustandekommen dieser Arbeit bedanken sowie bei Dr. Klein und Prof. Dr. Wüst für ihre ausgezeichnete Betreuung und Ermutigung. Weiterhin danke ich Frau Viefhaus und den Herren Maier, Poelchau, Voßbeck, Widmann und Wiehe für fruchtbare Diskussionen.

2. Bezeichnungen

In einem normierten Raum $\langle X, \| \, \| \rangle$ bezeichne für jedes $x \in X$ und jedes $r > 0$ das Symbol $K_r(x)$ die offene Kugel um x mit Radius r, und für jedes $M \subset X$ sei $\overline{M}$ der Abschluß von M.

Tupel werden in dreieckigen Klammern geschrieben z.B. : $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle$

Das Skalarprodukt in Hilberträumen wird mit $(\cdot\,,\,\cdot)$ bezeichnet und sei im zweiten Eingang linear[2]. Sei also $\langle H, (\cdot\,,\,\cdot)\rangle$ Hilbertraum. Dann seien folgende Bezeichnungen für Räume von Abbildungen aus H in H vereinbart:

$\mathfrak{L}(H)$: Raum der linearen Abbildungen aus H in H,
$\mathfrak{B}(H)$: Raum der beschränkten linearen Abbildungen aus H in H und
$\mathfrak{I}(H)$: Raum der selbstadjungierten linearen Abbildungen aus H in H.
Ferner sei das orthogonale Komplement von $M \subset H$ mit $M^{\perp}$ bezeichnet.
Sei A ein linearer Operator aus H in H. Dann wird mit A^* sein Adjungierter bezeichnet.

Seien $\langle H_1, (\cdot\,,\,\cdot)_1\rangle$ und $\langle H_2, (\cdot\,,\,\cdot)_2\rangle$ Hilberträume. Dann bezeichne $H_1 \oplus H_2$ den Hilbertraum $\langle H_1 \times H_2, (\cdot\,,\,\cdot)\rangle$ mit

$$(\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_2, y_2\rangle) := (x_1, x_2)_1 + (y_1, y_2)_2 \qquad (x_1, x_2 \in H_1,\ y_1, y_2 \in H_2).$$

Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $n \in \mathbb{N}$. Dann seien folgende Bezeichnungen für die Räume von Funktionen von I nach $\mathbb{C}$ vereinbart:

$L^1(I)$: Raum der (Äquivalenzklassen der) absolutintegrierbaren Funktionen,
$L^2(I)$: Raum der (Äquivalenzklassen der) quadratintegrierbaren Funktionen,
$L^1_{loc}(I)$: Raum der (Äquivalenzklassen der) lokal integrierbaren Funktionen,
$L^1_{loc,u}(I)$: Raum der (Äquivalenzklassen der) lokal uniform integrierbaren Funktionen, d.h.

$$L^1_{loc,u}(I) := \left\{ f \in L^1_{loc}(I) \ /\ \exists\, M > 0 \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \int_a^{a+1} |f| < M \right\},$$

$C^{\infty}(I)$: Raum der beliebig oft stetig differenzierbaren Funktionen,
$C^n(I)$: Raum der n-fach stetig differenzierbaren Funktionen,
$AC(I)$: Raum der absolut stetigen Funktionen,
$H^n(\mathbb{R})$: n-ter Sobolevraum, d.h. der Raum aller Distributionen, deren Fouriertransformierte durch eine meßbare Funktion dargestellt wird, für die gilt:

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + k^2)^n |f(k)|^2 dk < \infty.$$

[2] Das ist die Konvention von [R\S].

Der Index "0" soll den Raum der betrachteten Funktionen auf solche mit kompaktem Träger einschränken.

Für eine Menge M und deren Teilmenge N definiere χ_N die charakteristische Funktion von N durch

$$\chi_N : M \to [0,1]$$

$$\chi_N(x) := \begin{cases} 1 & x \in N \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

3. Definition von H_0 und H

Ziel ist es, für die formalen Operatoren $-\Delta + V$ und $-\Delta + V + Q$ je eine selbstadjungierte Realisierung H_0 bzw. H in $L^2(\mathbb{R})$ zu finden. $Vf \in L^2(\mathbb{R})$ ist nicht einmal für $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ garantiert, so daß man H_0 und H nicht als selbstadjungierte Fortsetzung eines minimalen Operators mit Definitionsbereich $C_0^\infty(\mathbb{R})$ erhalten kann. Deshalb konstruiert man H_0 und H über die zu ihnen (im Sinne des Darstellungssatzes[3]) assoziierten dicht definierten, symmetrischen, halbbeschränkten, abgeschlossenen Sesquilinearformen in $L^2(\mathbb{R})$.

Zur Vereinbarung einiger Begriffe aus der Theorie der Sesquilinearformen folgt

Definition 3.1:

Seien H ein komplexer Hilbertraum und $D \subset H$ Teilraum.

a) $t: D \times D \to \mathbb{C}$ heiße Sesquilinearform genau dann, wenn für festes $f \in D$ die Abbildungen $t(f, \cdot)$ linear und $t(\cdot, f)$ konjugiert linear sind.[4]

Sei $t: D \times D \to \mathbb{C}$ eine Sesquilinearform.

[3] siehe z.B. [K, Theorem VI-2.1]

[4] Das ist die Konvention von [R\S].

b) Die zu t gehörige quadratische Form sei definiert durch

$$t(f) := t(f,f) \qquad (f \in D).$$

Mit der Polarisationsidentität

$$t(f,g) = \tfrac{1}{4}\,[t(f+g) \;-t(f-g) \;+i\;t(f+i\,g) \;-i\;t(f-i\,g)] \tag{3.0}$$

sieht man ein, daß die Beziehung zwischen quadratischen und sesquilinearen Formen eineindeutig ist. Im folgenden werden beide häufig nur noch als Formen bezeichnet.

c) t heiße dicht definiert genau dann, wenn D dicht in H liegt (da im folgenden nur noch dicht definierte Formen auftauchen werden, wird diese Eigenschaft nicht mehr explizit erwähnt werden), und

d) t heiße symmetrisch genau dann, wenn

$$t(f,g) = \overline{t(g,f)} \qquad (f,g \in D).$$

Sei t zusätzlich symmetrisch[5].

e) Es heiße t halbbeschränkt genau dann, wenn es ein $\gamma \in \mathbb{R}$ gibt, so daß

$$t(f) \geq \gamma \,\|f\|^2 \qquad (f \in D).$$

γ heiße dann eine untere Schranke von t.

Sei zusätzlich t halbbeschränkt mit Schranke $\gamma \in \mathbb{R}$.

Seien $D' \subset H$, $t'{:}D' \times D' \rightarrow \mathbb{C}$ eine weitere Form und $\alpha \in \mathbb{R}$.

f) Es heiße t′ relativ formbeschränkt bzgl. t mit Grenze α genau dann, wenn $D' \supset D$ und es zu jedem positiven ϵ ein positves δ gibt, so daß

$$|t'(f)| \leq (\alpha + \epsilon)\; t(f) + \delta \,\|f\|^2 \qquad (f \in D).$$

Man kann zeigen, daß

$$\|f\|_t := \sqrt{\;t(f) + (1-\gamma)\|x\|^2}$$

[5]Für symmetrisches t gilt

$$t(f) \in \mathbb{R} \qquad (f \in D).$$

eine Norm auf D definiert [K, VI-§1.3, p.314] und daß unterschiedliche untere Schranken äquivalente Normen erzeugen.

g) Es heiße t abgeschlossen genau dann, wenn $\langle D, \| \ \|_t \rangle$ vollständig ist.

Es sei zusätzlich t abgeschlossen.

h) $D_0 \subset D$ heiße Formcore von t genau dann, wenn D_0 dicht liegt in $\langle D, \| \ \|_t \rangle$.

Es geht im folgenden darum, Formen h_0 und h zu finden, so daß einerseits

$$h_0(f,g) = (f,[-\Delta + V]g) \qquad (f \in D(h_0), g \in D(H_0))$$

und

$$h(f,g) = (f,[-\Delta + V + Q]g) \qquad (f \in D(h), g \in D(H))$$

und andererseits h_0 und h symmetrisch, halbbeschränkt und abgeschlossen sind. Dazu faßt man h_0 und h als Störungen der zum Laplaceoperator assoziierten sogenannten Dirichletform

$$d(f,g) = (f',g') \qquad (f,g \in H^1(\mathbb{R}))$$

auf, die symmetrisch, nicht negativ und abgeschlossen ist. Außerdem weiß man, daß der dichte Definitionsbereich, die Abgeschlossenheit und die Halbbeschränktheit stabil sind unter relativ formbeschränkten Störungen mit kleinerer Schranke als 1; da V und Q reellwertig sind, bleibt auch die Symmetrie erhalten. Anzumerken ist noch, daß der Darstellungssatz zwar die Existenz eines selbstadjungierten Operators garantiert, jedoch dessen Definitionsbereich nicht mitliefert.

Zunächst das technische

Lemma 3.2:

Es gilt $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall f \in AC(\mathbb{R}) \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \forall\, c \in \mathbb{R}$

$$|f(c)|^2 \leq \epsilon \int_a^{a+1} |f'(y)|^2 dy + \delta \int_a^{a+1} |f(y)|^2 dy.$$

Beweis:

Seien $f \in AC(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$, $c \in [a, a+1]$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann ist mit [K, IV-(1.19)]

$$|f(c)| \leq \frac{1}{\sqrt{2n+3}} \sqrt{\int_a^{a+1} |f'(x)|^2 dx} + \frac{n+1}{\sqrt{2n+3}} \sqrt{\int_a^{a+1} |f(x)|^2 dx}. \tag{3.1}$$

Unter Verwendung von[6]

$$(\alpha+\beta)^2 \leq (1+\mu)\alpha^2 + (1+\tfrac{1}{\mu})\beta^2 \qquad (\alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R},\ \mu > 0)$$

liefert (3.1) nach Quadrieren:

$$|f(c)|^2 \leq (1+\mu)\frac{1}{2n+3}\int_a^{a+1} |f'(x)|^2 dx + (1+\tfrac{1}{\mu})\frac{(n+1)^2}{2n+3}\int_a^{a+1} |f(x)|^2 dx \qquad (\mu > 0), \quad (3.2)$$

so daß die Behauptung folgt. □

Die relative Formbeschränktheit bzgl. d der zu V und Q gehörigen Formen wird garantiert durch

Lemma 3.3:

Sei $W \in L^1_{loc,u}(\mathbb{R})$ und reellwertig. Dann ist

$$w(f,g) := \int_{\mathbb{R}} \bar{f}\, W\, g \qquad (f,g \in H^1(\mathbb{R}))$$

wohldefiniert und relativ formbeschränkt bzgl. d mit Grenze 0.

Beweis:

Sei $W \in L^1_{loc,u}(\mathbb{R})$. Zu zeigen ist: $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall f \in H^1(\mathbb{R})$

$$|w(f)| \leq \epsilon\, d(f) + \delta\, \|f\|.$$

Sei $\epsilon > 0$. Nach Lemma 3.2 gibt es ein $\delta > 0$, so daß

$$|f(y)|^2 \leq \int_y^{y+1} \epsilon |f'|^2 + \delta |f|^2 \qquad (y \in \mathbb{R}).$$

[6]Die Gleichung folgt aus der binomischen Formel.

Damit ist

$$|w(f)| \leq \int_{\mathbb{R}} |W(y)|\ |f(y)|^2 dy \ \leq\ \int_{\mathbb{R}} |W(y)| \int_y^{y+1} (\epsilon|f'|^2 + \delta|f|^2) dy. \tag{3.4}$$

Um die rechte Seite umzuformen, betrachtet man zunächst endliche Integralgrenzen. Seien a>0 und

$$I(y) := \int_0^y |W| \qquad (y \in \mathbb{R})$$

sowie

$$g_{\epsilon,\delta}(y) := \int_y^{y+1} (\epsilon|f'|^2 + \delta|f|^2) \qquad (y \in \mathbb{R}). \tag{3.5}$$

Dann folgt mit partieller Integration und einer Substitution:

$$\int_{-a}^{a} |W(y)| \left(\int_y^{y+1} g_{\epsilon,\delta}\right) dy = I(a)\int_a^{a+1} g_{\epsilon,\delta}(y) \ - \ I(-a)\int_{-a}^{-a+1} g_{\epsilon,\delta} \ -$$

$$- \int_{-a}^{a} I(y) g_{\epsilon,\delta}(y+1) dy \ + \ \int_{-a}^{a} I g_{\epsilon,\delta}$$

$$= I(a)\int_a^{a+1} g_{\epsilon,\delta} \ - I(-a)\int_{-a}^{-a+1} g_{\epsilon,\delta} - \int_{-a}^{a} I(y) g_{\epsilon,\delta}(y+1) dy +$$

$$+ \int_{-a}^{a} I(y+1) g_{\epsilon,\delta}(y+1) dy \ + \int_{-a}^{-a+1} I g_{\epsilon,\delta} - \int_a^{a+1} I g_{\epsilon,\delta}$$

$$= \int_a^{a+1} (I(a) - I(y)) g_{\epsilon,\delta}(y) dy + \int_{-a}^{-a+1} (I(y) - I(-a)) g_{\epsilon,\delta}(y) dy +$$

$$+ \ \int_{-a}^{a} (I(y+1) - I(y)) g_{\epsilon,\delta}(y+1) dy$$

$$\leq \ \int_{-a}^{-a+1} (I(-a+1) - I(-a)) g_{\epsilon,\delta}(y) dy \ +$$

$$+ \int_{-a}^{a} (I(y) - I(y+1)) g_{\epsilon,\delta}(y+1) dy,$$

wobei im letzten Schritt die Monotonie von I ausgenutzt wurde. Nach Voraussetzung gibt es ein M > 0, so daß gilt:

$$I(y) - I(y+1) = \int_{y}^{y+1} |W| < M \qquad (y \in \mathbb{R}).$$

Damit folgt:

$$\int_{-a}^{a} |W(y)| \left(\int_{y}^{y+1} g_{\epsilon,\delta} \right) dy \quad \leq M \left(\int_{-a}^{-a+1} g_{\epsilon,\delta}(y) dy + \int_{-a}^{a} g_{\epsilon,\delta}(y+1) dy \right) = M \left(\int_{-a}^{a+1} g_{\epsilon,\delta} \right).$$

Der Grenzübergang a→∞ liefert mit (3.4) und (3.5)

$$|w(f)| \leq M\epsilon \int_{\mathbb{R}} |f'|^2 + M\delta \int_{\mathbb{R}} |f|^2,$$

und die Behauptung folgt mit der Polarisationsidentität (3.0). □

Da sowohl V als auch $V + Q$ in $L^1_{loc,u}(\mathbb{R})$ liegen, ermöglicht Lemma 3.3 die

Definition 3.4 :

Seien

$$v(f,g) := \int_{\mathbb{R}} \overline{f} V g \qquad (f, g \in H^1(\mathbb{R})),$$

$$q(f,g) := \int_{\mathbb{R}} \overline{f} Q g \qquad (f, g \in H^1(\mathbb{R}))$$

und $h_0 := d + v$ sowie $h := d + v + q$.

Eine weitere Folge des Lemmas 3.3 ist

Satz 3.5 :

Es sind h_0 und h symmetrische, halbbeschränkte und abgeschlossene Formen in $L^2(\mathbb{R})$.

Beweis :

Die Symmetrie folgt aus der Symmetrie von d und der Tatsache, daß V und Q reellwertig sind. Da d selbst halbbeschränkt und abgeschlossen ist und da nach Lemma 3.3 sowohl v als auch $v+q$ bzgl. d relativ formbeschränkt mit Schranke kleiner 1 sind, folgen nach [K, Theorem VI-1.33] die Symmetrie und die Abgeschlossenheit sowohl von h_0 als auch von h. □

Mit Hilfe des Darstellungssatzes kommt man nun zu selbstadjungierten Realisierungen von $-\Delta+V$ und $-\Delta+V+Q$:

Definition 3.6 :

Die über den Darstellungssatz definierten eindeutig zu h_0 und h assoziierten selbstadjungierten Operatoren in $L^2(\mathbb{R})$ sollen H_0 und H heißen.

4. Darstellung von H_0 als direktes Integral

In diesem Kapitel geht es darum, eine besondere Eigenschaft des Operators H_0 zu untersuchen: Bedingt durch die Periodizität des Potentials V hat H_0 eine Darstellung als sogenanntes direktes Integral über eine Familie von Faseroperatoren $\{H_0(k)\}_{k\in[0,2\pi)}$. Dabei wirken die Faseroperatoren als Differentialoperatoren auf dem Periodizitätsintervall $[0,1]$ und haben die formale Gestalt $H_0(k) = -\Delta+V$, wobei die Restriktion von V auf das Periodizitätsintervall $[0,1]$ auch mit V bezeichnet wird. Der Scharparameter k geht lediglich über die sogenannte Blochsche Randbedingung in die Definitionsbereiche der Operatoren $H_0(k)$ ein.

Genau wie im letzten Kapitel werden zunächst geeignete Formen konstruiert, auf die dann der Darstellungssatz angewendet werden kann:

Lemma 4.1 :

Seien H Hilbertraum, $D\subset H$ dicht, t: $D\to H$ eine symmetrische, halbbeschränkte Form mit unterer Schranke $\gamma<0$ und T: $D\to H$ linear mit

$$t(f) = \|Tf\|^2 \qquad (f \in D).$$

Dann gilt:

a) t ist genau dann abgeschlossen, wenn T abgeschlossen ist.

Seien zusätzlich t abgeschlossen und $D_0 \subset D$. Dann gilt:

b) D_0 ist ein Formcore von T genau dann, wenn D_0 ein "core"[7] von T ist.

Beweis :
Seien $\|\cdot\|_T$ die Graphennorm von T und $f \in D$. Dann gelten

$$\|f\|_T \leq \|f\|_t$$

$$\|f\|_t \leq (1-\gamma)\ \|f\|_T,$$

d.h. die Normen sind äquivalent. Daraus folgt die Behauptung. □

Satz 4.2 :
Seien $k \in \mathbb{R}$, $D(d_k) := \{\varphi \in AC([0,1]) \mid \varphi(1) = e^{ik}\varphi(0),\ \varphi' \in L^2([0,1])\}$ und

$$d_k(\varphi,\psi) := \int_0^1 \overline{\varphi'}\psi' \qquad (\varphi,\psi \in D(d_k))$$

sowie

$$\partial_k(\varphi) := i\varphi' \qquad (\varphi \in D(d_k))$$

Dann gelten

a) ∂_k ist selbstadjungiert,

b) d_k ist symmetrisch, nicht negativ und abgeschlossen,

c)
$$v_k(\varphi,\psi) := \int_0^1 \overline{\varphi}V\psi \qquad (\varphi,\psi \in D(d_k))$$

ist wohldefiniert und relativ formbeschränkt bzgl. d_k mit Grenze 0 und zwar uniform in k, sowie

d) $h_k := d_k + v_k$ ist symmetrisch, halbbeschränkt und abgeschlossen.

[7]siehe [K, III-5.3, p.166]

Beweis :

a) siehe [R\S I, p.259]

b) folgt aus Lemma 4.1 a).

c) Seien $k \in \mathbb{R}$ und $\varphi \in D(d_k)$. Dann ist

$$|(\varphi, V\varphi)| \leq \int_0^1 V|\varphi|^2 \leq \|V\|_1 \cdot \|\varphi\|_\infty^2 . \tag{4.1}$$

Sei $x \in [0,1]$. Dann gilt

$$|\varphi(x)|^2 = \int_0^x (|\varphi|^2)' + |\varphi(0)|^2$$

$$= 2\, Re \int_0^x \overline{\varphi}'\varphi + |\varphi(0)|^2. \tag{4.2}$$

Sei weiterhin $\epsilon > 0$. Dann ist einerseits mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und der binomischen Formel:

$$\left|2\, Re \int_0^x \overline{\varphi}'\varphi\right| \leq 2\left|\int_0^x \overline{\varphi}'\varphi\right| \leq 2\,(\int_0^x |\varphi'|^2\,)^{\frac{1}{2}}\,(\int_0^x |\varphi|^2\,)^{\frac{1}{2}} \leq \epsilon\int_0^x |\varphi'|^2 + \tfrac{1}{\epsilon}\int_0^x |\varphi|^2 \tag{4.3}$$

und andererseits liefert Lemma 3.2 (angewendet auf eine absolutstetige Fortsetzung von φ auf $\mathbb{R}$) die Existenz eines $\delta > 0$, so daß gilt:

$$|\varphi(0)|^2 \leq \epsilon\int_0^1 |\varphi'|^2 + \delta\int_0^1 |\varphi|^2 . \tag{4.4}$$

Mit (4.3) und (4.4) liefert also (4.2):

$$\|\varphi\|_\infty^2 \leq \epsilon\int_0^1 |\varphi'|^2 + (\,\tfrac{1}{\epsilon} + \delta)\int_0^1 |\varphi|^2 , \tag{4.5}$$

so daß mit (4.1) und der Polarisationsidentität (3.0) die Behauptung folgt.

d) folgt aus b) und c) mit [K, Theorem VI-1.33]. □

Anders als im dritten Kapitel wird es wichtig sein, die Definitionsbereiche der Faseroperatoren $H_0(k)$ zu kontrollieren. Dazu

Satz 4.3 :

Seien $k \in \mathbb{R}$ und $H_0(k)$ der über den Darstellungssatz definierte eindeutig zu h_k gehörige halbbeschränkte, selbstadjungierte Operator in $L^2([0,1])$ und

$$M_k := \{\varphi \in AC([0,1]) \mid \varphi' \in AC([0,1]) , \ -\varphi'' + V\varphi \in L^2([0,1]),$$
$$\varphi(1) = e^{ik}\varphi(0), \varphi'(1) = e^{ik}\varphi'(0)\}.$$

Dann ist $D(H_0(k)) = M_k$.

Beweis :

Sei $k \in \mathbb{R}$. " $\subset$ " Seien $\varphi \in D(H_0(k)) \ \subset D(d_k)$, $\psi := H_0(k)\varphi$ und $\chi \in D(d_k)$. Dann ist

$$\int_0^1 \overline{\chi}\psi = (\chi, H_0(k)\varphi) = h_k(\chi, \varphi) = \int_0^1 \overline{\chi}'\varphi' + \int_0^1 \overline{\chi} V\varphi. \tag{4.6}$$

Wegen $\psi \in L^2([0,1]) \subset L^1([0,1])$, $\varphi \in L^\infty([0,1])$ und $V \in L^1([0,1])$ existiert nach dem Hauptsatz der Lebesguetheorie ein $z \in AC([0,1])$ mit $z' = \psi - V\varphi$. Damit folgt aus (4.6):

$$(\chi', \varphi' + z) = \int_0^1 \overline{\chi}'\varphi' + \int_0^1 \overline{\chi}'z = \int_0^1 \overline{\chi}'\varphi' + \overline{\chi}z\Big|_0^1 - \int_0^1 \overline{\chi}(\psi - V\varphi) = \overline{\chi}z\Big|_0^1 . \tag{4.7}$$

Seien
$$c := \int_0^1 \varphi' + z \tag{4.8}$$

und
$$\chi_c(x) := \int_0^x (\varphi' + z - c) \qquad (x \in [0,1]). \tag{4.9}$$

Wegen $\chi_c(1) = \chi_c(0) = 0$ ist dann $\chi_c \in D(d_k)$ und mit (4.9), (4.7) und (4.8) folgt

$$\int_0^1 |\varphi' + z - c|^2 = (\chi_c', \varphi' + z) - c\int_0^1 \overline{\varphi' + z - c} \ = \overline{\chi}z\Big|_0^1 = 0,$$

d.h.
$$\varphi' + z = c \tag{4.10}$$

zunächst im L^2-Sinn, jedoch mit einem geeigneten Repräsentanten auch als Gleichheit von Funktionen.

Damit liefert partielle Integration von (4.7) für alle $\chi \in D(d_k)$:

$$0 = -\overline{\chi}z\Big|_0^1 + \overline{\chi}(\varphi' + z)\Big|_0^1 = \overline{\chi}(1)\varphi'(1) - \overline{\chi}(0)\varphi'(0) \ = \overline{e^{ik}}\overline{\chi}(0)\varphi'(1) - \overline{\chi}(0)\varphi(0),$$

woraus folgt

$$\varphi'(1) \;=\; e^{ik}\varphi(0)\;.$$

Aus (4.10) folgen $\varphi' \in AC([0,1])$ und

$$0 \;= \varphi'' + z' = \varphi'' + \psi - V\varphi = \;-(\,-\varphi'' + V\varphi) + H_0(k)\varphi,$$

also insbesondere $-\varphi'' + V\varphi \in L^2([0,1])$. Also ist $\varphi \in M_k$.

"$\supset$" : Sei $\varphi \in M_k \;\subset D(h_k)$. Dann ist für alle $\chi \in D(h_k)$ mit partieller Integration unter Berücksichtigung der Randbedingungen

$$h_k(\chi,\varphi) \;=\; \int_0^1 \overline{\chi}'\varphi' + \int_0^1 \overline{\chi}V\varphi \;=\; \int_0^1 \overline{\chi}\,(\,-\varphi''+V\varphi)\;. \tag{4.11}$$

Wegen $-\varphi'' + V\varphi \in L^2([0,1])$ ist nach dem Darstellungssatz $\varphi \in D(H_0(k))$. □

Um die Abhängigkeit der Faseroperatoren $H_0(k)$ vom Scharparameter k formulieren zu können, werden in den folgenden beiden Definitionen einige Begriffe vereinbart, in der Weise wie sie auch in [R\S] verwendet werden:

Definition 4.4 :

Seien H ein separabler Hilbertraum und $\langle X,\mu\rangle$ ein σ-endlicher Maßraum.

a) Es heiße $f{:}\,M \to H$ (schwach-) meßbar genau dann, wenn für alle $\psi \in H$ die Abbildung $\psi_f{:}\,M \to H, \psi_f = (\psi, f(\cdot))$ meßbar ist.

Es gibt alternative Definitionen der Meßbarkeit, die sich aber schließlich als äquivalent zur obigen herausstellen. Man kann auch zeigen, daß für meßbare $f{:}\,X \to H$ die Abbildung $n_f : X \to [0,\infty),\; n_f := \|\, f(\cdot)\,\|^2$ meßbar ist. Damit ist es sinnvoll, zu definieren :

b) $$\int_X^{\oplus} H\,d\mu \;:= \{f{:}X \to H \mid f \text{ meßbar und } \int_X \|\, f(x)\,\|^2 d\mu(x) < \infty\}.$$

Man kann zeigen, daß mit

$$(f,g) := \int_X (f(x),g(x))d\mu(x) \qquad\qquad (f,g \in \int_X^{\oplus} H\,d\mu)$$

$$\int_X^{\oplus} H d\mu$$ zu einem Hilbertraum wird.

c) Es heiße $A(\cdot)$: $X \to \mathfrak{B}(H)$ meßbar genau dann, wenn für alle $\varphi, \psi \in H$ die Abbildung $(\varphi, A(\cdot)\psi)$: $X \to \mathbb{C}$ meßbar ist.

d) Es heiße $A(\cdot)$: $X \to \mathfrak{S}(H)$ meßbar genau dann, wenn $(A(\cdot)+i)^{-1}$meßbar ist.

Man kann zeigen, daß für meßbares $A(\cdot)$: $X \to \mathfrak{S}(H)$ und meßbares $f: X \to H$ mit

$$D(\int_X^{\oplus} A(x)d\mu(x)) := \{f \in \int_X^{\oplus} H d\mu \mid f(x) \in D(A(x)) \ \mu\text{-}f.\ddot{u}., \int_X \| A(x)f(x) \|^2 d\mu(x) < \infty\}$$

durch $$\Big(\int_X^{\oplus} A(x)d\mu(x)\ f\Big)(x) := A(x)f(x) \qquad \text{in} \quad \int_X^{\oplus} H d\mu$$

ein selbstadjungierter Operator definiert ist.

Definition 4.5 :

Seien H Hilbertraum, $\Omega \subset \mathbb{C}$ und $T: \Omega \to \mathfrak{L}(H)$. Dann gelte:

T heißt analytisch im Sinne von Kato genau dann, wenn für jedes $z \in \Omega$ gilt:
$T(z)$ ist abgeschlossen, hat eine nichtleere Resolventenmenge, und es gibt ein $E \in \rho(T(z))$ sowie eine Umgebung U von z, so daß für jedes $\tilde{z} \in U$ gilt $E \in \rho(T(\tilde{z}))$, und $(T(\cdot)) - E)^{-1}$ist in U analytisch[8].

Im folgenden Satz wird die Resolvente der Faseroperatoren $H_0(k)$ untersucht und wie schon angedeutet die Abhängigkeit vom Scharparameter analysiert. Besonders im Hinblick auf die Analyse des Spektrums des Operators H_0 im folgenden Kapitel wird es sich als sinnvoll erweisen, auch komplexe Scharparameter zuzulassen. Im Beweis muß man die zum Operator $H_0(k)$ gehörige Eigenwertgleichung betrachten. Dazu das folgende Lemma. Außerdem wird noch ein Lemma aus der Analysis benötigt.

Lemma 4.6 :

Sei $E \in \mathbb{C}$. Dann hat die Differentialgleichung[9] (im folgenden DGL)

$$-u'' + Vu - Eu = 0$$

[8] Zur Definition der Analytizität von banachraumwertigen Funktionen siehe [R\S-I, VI.3, p.189]

[9] Alle DGLen und IGLen sind als Aussageformen mit dem Quantor für fast alle $(\cdot)$ bzgl des Borel-Lebesgue Maßes zu verstehen.

in $[0,1]$ genau ein Fundamentalsystem $\{f_+(\cdot,E), f_-(\cdot,E)\}$, für das gilt:

a) $$f_+(0,E) = f'_-(0,E) = 1$$

und $$f'_+(0,E) = f_-(0,E) = 0\ ,$$

b) $f_+(\cdot,E)$ $\big(f_-(\cdot,E)\big)$ ist die eindeutige Lösung der Volterra-Integralgleichung[8] (im folgenden VIGL)

$$u(x,E) = cos(\sqrt{E}x) + \int_0^x \frac{sin\sqrt{E}(x-t)}{\sqrt{E}} V(t)u(t,E)\ dt \qquad (x \in [0,1])$$

$$\left(u(x,E) = \frac{sin(\sqrt{E}x)}{\sqrt{E}} + \int_0^x \frac{sin\sqrt{E}(x-t)}{\sqrt{E}} V(t)u(t,E)\ dt \qquad (x \in [0,1])\right),$$

c) für festes $x \in [0,1]$ sind $f_\pm(x,\cdot)$ und $f'_\pm(x,\cdot)$ reellanalytische Funktionen in ganz $\mathbb{C}$ und

d) es sind $E \mapsto \|f_\pm(\cdot,E)\|_\infty$ und $E \mapsto \|f'_\pm(\cdot,E)\|_\infty$ in $\mathbb{C}$ lokal beschränkt.

Beweis :

Man argumentiert wie im Beweis von Satz 6.3 (Iteration). □

Lemma 4.7 :

Seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $\langle X, d\mu\rangle$ Maßraum, φ: $\Omega \times X \to \mathbb{C}$ beschränkt und für jedes $z \in \Omega$ die Funktion $\varphi(z,\cdot)$ meßbar sowie für jedes feste $t \in X$ die Funktion $\varphi(\cdot,t)$ analytisch. Dann ist

$$f := \int_X \varphi(\cdot,t) d\mu(t) \qquad \text{analytisch mit} \qquad \partial f = \int_X \partial_1 \varphi(\cdot,t) d\mu(t),$$

d.h es gilt

$$\lim_{z \to z_0} \int_X \left(\frac{\varphi(z,t) - \varphi(z_0,t)}{z - z_0} - \partial_1 \varphi(z,t)\right)\ d\mu(t) \ \to 0 \qquad (z_0 \in \Omega).$$

Beweis :

Seien $z_0 \in \Omega$ und $r > 0$, so daß $\overline{K_r(z_0)} \subset \Omega$. Dann gilt für alle $z \in K_{\frac{r}{2}}(z_0)$ mit der Cauchy-Formel für alle $t \in X$:

$$\varphi(z,t)-\varphi(z_0,t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K_r(z_0)} \varphi(\tilde z,t)\,\left(\frac{1}{\tilde z - z} - \frac{1}{\tilde z - z_0}\right) d\tilde z$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K_r(z_0)} \varphi(\tilde z,t)\,\frac{z-z_0}{(\tilde z - z)(\tilde z - z_0)}\; d\tilde z\;,$$

also $$\left|\varphi(z,t)-\varphi(z_0,t)\right| \le\; sup(\,|\,\varphi\,|\,(\Omega\times X))\;\;|\,z_0 - z\,|\;\tfrac{4}{r}\;.$$

Damit ist dann nach dem Satz über majorisierte Konvergenz:

$$\lim_{z\longrightarrow z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \;=\; \lim_{z\longrightarrow z_0} \int\limits_X \frac{\varphi(z,t)-\varphi(z_0,t)}{z-z_0}\;\; d\mu(t) \;\;=\; \int\limits_X \partial_1\varphi(z,t)\;\; d\mu(t) \;<\infty. \qquad \square$$

Satz 4.8 :

Sei $k\in\mathbb{C}$. Definiere

$$H_0(k)\psi := -\psi + V\psi \qquad\qquad (\psi\in D(H_0(k)))$$

mit $$D(H_0(k)) \;:=\{\varphi\in AC([0,1])\;\mid \varphi'\in AC([0,1])\;,\; -\varphi''+V\varphi\in L^2([0,1]),$$
$$\varphi(1)=e^{ik}\varphi(0),\; \varphi'(1)=e^{ik}\varphi'(0)\}.$$

Dann gelten :

a) Seien $E\notin\sigma(H_0(k))$ und für feste $x,y\in[0,1]$

$$R_{1,k}u := u(1)-e^{ik}u(0)$$
und $$R_{2,k}u := u'(1)-e^{ik}u'(0) \qquad\qquad (u\in\{\psi\in AC([0,1])\,|\,\psi'\in AC([0,1])\;\}\;),$$

$$\Delta_k(E) := R_{1,k}f_+(\,\cdot\,,E)R_{2,k}f_-(\,\cdot\,,E) - R_{2,k}f_+(\,\cdot\,,E)R_{1,k}f_-(\,\cdot\,,E),$$

$$r_< := r_<(x,y) := min\{x,y\}$$
$$r_> := r_>(x,y) := max\{x,y\}$$

$$\gamma(x,y,E) := \tfrac{1}{2}(f_-(r_<,E)f_+(r_>,E) - f_-(r_<,E)f_+(r_>,E)),$$

$$Z_k(x,y,E) := det \begin{pmatrix} f_+(x,E) & f_-(x,E) & \gamma(x,y,E) \\ R_{1,k} f_+(\cdot,E) & R_{1,k} f_-(\cdot,E) & R_{1,k}\gamma(\cdot,y,E) \\ R_{2,k} f_+(\cdot,E) & R_{2,k} f_-(\cdot,E) & R_{2,k}\gamma(\cdot,y,E) \end{pmatrix}$$

$$R_k(x,y,E) := \frac{Z_k(x,y,E)}{\Delta_k(E)}\,.$$

Dann ist die Resolvente von $H_0(k)$ an der Stelle E :

$$R_k(E)\psi = \int_0^1 R_k(\cdot,y,E)\psi(y)dy \qquad (\psi \in L^2([0,1])).$$

b) $H_0(k)$ hat eine kompakte Resolvente[10].

c) $H_0(\cdot)$ ist eine in ganz $\mathbb{C}$ analytische Funktion im Sinne von Kato.

d) Es ist $\int_{[0,2\pi)}^{\oplus} H_0(k)\,\frac{dk}{2\pi}$ selbstadjungiert.

Beweis :

a) läßt sich analog zu [H, II.1.2, Satz 3] beweisen, wobei zu berücksichtigen ist, daß hier

$$W(f_+(x,E), f_-(x,E)) = 1 \qquad (x \in [0,1])$$

gilt[11]. W bezeichnet die Wronskideterminante .

b) und c) Für feste $x,y \in [0,1]$ und $E \in \mathbb{C}$ sind $k \mapsto \Delta_k(E)$ und $k \mapsto Z_k(x,y,E)$ ganze Funktionen. Als Quotient ganzer Funktionen (mit einem Nenner ungleich der Nullfunktion) ist $R_{(\cdot)}(x,y,E)$ in $\mathbb{C}$ meromorph. Genauso ist für feste $x,y \in [0,1]$ und $k \in \mathbb{C}$ die Funktion $R_k(x,y,\cdot)$ in $\mathbb{C}$ meromorph.
Sei $E \in \mathbb{C}$ und k keine Nullstelle von $\Delta_{(\cdot)}(E)$. Aus der Beschränktheit der $f_\pm(\cdot,E)$ und ihrer Ableitungen (Lemma 4.5 d)) sowie der lokalen Beschränktheit von $p \mapsto e^{ip}$ folgt die Existenz einer Umgebung U von k, für die gilt

[10] siehe auch [R\S-IV, Theorem XII.64]

[11] Für eine lineare DGL zweiter Ordnung der Form

$$u''(x) + a(x)u(x) = b(x) \qquad (x \in I)$$

mit einem geeigneten Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und geeigneten $a,b \in L^1(I)$ ist die Wronskideterminante zweier Lösungen immer unabhängig von x.

$$c_U := sup\,|\,R(\cdot)(\,\cdot\,,\,\cdot\,,E)\,|\,([0,1]\times[0,1]\times U) < \infty. \tag{4.12}$$

Zusammen mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt

$$\|\, R_p(E)\,\|^2 \le \int_0^1\int_0^1 |\, R_p(x,y,E)\,|^2 dydx \le c_U(E) < \infty \qquad (p\in U). \tag{4.13}$$

Es gilt also b). Gemäß Definition 4.5 sind zu zeigen :

(i) $\rho(H_0(k))$ ist nicht leer,

(ii) $H_0(k)$ ist abgeschlossen und

(iii) $p\mapsto R_p(E)$ ist in U analytisch.

Es gilt (i), da z.B. $E\in\rho(H_0(k))$. Zu (ii) überlegt man sich, daß $R_k(E)$ als beschränkter auf ganz $L^2([0,1])$ definierter Operator abgeschlossen ist. Das ist aber äquivalent zur Abgeschlossenheit von $(H_0(k)-E)$ ...

Für (iii) genügt es wegen (4.13), zu zeigen

$$\int_0^1\int_0^1 \left|\frac{R_k(x,y,E)-R_p(x,y,E)}{k-p} - \partial_k R_k(x,y,E)\right|^2 dydx \to 0 \qquad (p\to k).$$

Das folgt aber aus Lemma 4.7 mit der Beschränktheit aus (4.12).

d) Nach c) ist die Restriktion von $H_0(\cdot)$ auf $([0,2\pi))$ insbesondere meßbar. Für $k\in[0,2\pi)$ ist $H_0(k)$ nach Satz 4.3 selbstadjungiert und damit folgt aus [R\S-IV, Theorem XIII.85] die Behauptung. □

Es wäre bequem, wenn man sich beim Beweis der unitären Äquivalenz der Operatoren H_0 und $\int_{[0,2\pi)}^{\oplus} H_0(k)\,\frac{dk}{2\pi}$ auf einen "core" einschränken könnte. Leider sind die Definitionsbereiche der Operatoren sehr unhandlich, so daß es sinnvoll ist, den Umweg über die zugehörigen Formen zu gehen. Hier kann man hoffen, die entscheidenden Rechnungen nur auf einem Formcore wie dem $C_0^\infty(\mathbb{R})$ durchführen zu müssen.

Lemma 4.9 :

a) Es ist die Abbildung

$$U: C_0^\infty(\mathbb{R}) \to \int_{[0,2\pi)}^{\oplus} L^2([0,1])\,\frac{dk}{2\pi}$$

durch $(Uf)(k) := U_k f \qquad (k \in [0, 2\pi))$

mit $U_k f(x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{ikn} f(x+n) \qquad (x \in [0,1])$

wohldefiniert und besitzt eine eindeutige Fortsetzung zu einer unitären Abbildung auf $L^2(\mathbb{R})$, die auch mit U bezeichnet wird.

b) Sei $\partial f := if' \qquad (f \in H^1(\mathbb{R}))$.

Dann ist
$$\begin{aligned}[0, 2\pi) &\to \mathcal{S}(L^2([0,1])) \\ k &\mapsto \partial_k\end{aligned}$$

meßbar und es gilt
$$\int_{[0,2\pi)}^{\oplus} \partial_k \frac{dk}{2\pi} \circ U = U\partial.$$

c) Es ist die Form
$$\int_{[0,2\pi)}^{\oplus} d_k \frac{dk}{2\pi} \circ U := \left\| \int_{[0,2\pi)}^{\oplus} \partial_k(U_k f) \frac{dk}{2\pi} \right\|^2 = \int_0^{2\pi} d_k(U_k f) \frac{dk}{2\pi} \qquad (f \in H^1(\mathbb{R}))$$
wohldefiniert und es gilt
$$d = \int_{[0,2\pi)}^{\oplus} d_k \frac{dk}{2\pi} \circ U.$$

d) Es ist die Form
$$\int_{[0,2\pi)}^{\oplus} v_k \frac{dk}{2\pi} \circ Uf := \int_0^{2\pi} v_k(U_k f) \frac{dk}{2\pi} \qquad (f \in H^1(\mathbb{R}))$$
wohldefiniert und relativ formbeschränkt bezüglich $\int_{[0,2\pi)}^{\oplus} d_k \frac{dk}{2\pi} \circ U$ mit Grenze 0.

e) Es gilt $v(f) = \int_{[0,2\pi)}^{\oplus} v_k(U_k f) \frac{dk}{2\pi} \qquad (f \in C_0^\infty(\mathbb{R}))$.

f) Es ist die Form
$$\int_{[0,2\pi)}^{\oplus} h_k \frac{dk}{2\pi} \circ Uf := \int_0^{2\pi} h_k(U_k f) \frac{dk}{2\pi} \qquad (f \in H^1(\mathbb{R}))$$

wohldefiniert und es gilt

g)

$$h_0 = \int_{[0,2\pi)}^{\oplus} h_k \frac{dk}{2\pi} \circ U.$$

Beweis :

a) siehe [R\S-IV, Lemma p.289]

b) Für $k \in \mathbb{R}$ ist nach Lemma 4.2 a) ∂_k selbstadjungiert und nach [K, Examples 2.6, 2.7, 6.8] ist für alle $f \in L^2([0,1])$

$$((\partial_k - i)^{-1} f)(x) = \frac{-ie^{ik}}{e^{ik} - e} \; [e^{ik} \int_0^x e^{-y} f(y)dy + e \int_x^1 e^{-y} f(y)dy] \qquad (x \in [0,1]).$$

Damit ist für alle $f, g \in L^2([0,1])$ die Abbildung $(g, (\partial_{(\cdot)} - i)^{-1} f)$ auf $[0,2\pi)$ meßbar,

d.h. $k \mapsto \partial_k$ ist meßbar; also ist $\int_{[0,2\pi)}^{\oplus} \partial_k \frac{dk}{2\pi}$ selbstadjungiert.

Seien $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ und $k \in \mathbb{R}$. Dann ist als endliche Summe $U_k f \in AC([0,1])$, $(U_k f)' \in L^2(\mathbb{R})$, außerdem gilt

$$U_k f(1) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-ikn} f(1+n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-ik(n-1)} f(n) = e^{ik} U_k f(0),$$

d.h. $U_k f \in D(d_k)$. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} U_k \partial f(x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{ik} i f'(x+n) = i\Big(\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{ik} f(x+n)\Big)' \\ &= i(U_k f)'(x) = (\partial_k U_k f)(x) \qquad\qquad (x \in [0,1]). \end{aligned} \tag{4.14}$$

Mit der Isometrie von U folgt

$$\infty > \| \partial f \|^2 = \| U \partial f \|^2 = \int_0^{2\pi} \| U_k \partial f \|^2 \frac{dk}{2\pi} = \int_0^{2\pi} \| \partial_k U_k f \|^2 \frac{dk}{2\pi}, \tag{4.15}$$

insbesondere ist $Uf \in D(\int_{[0,2\pi)}^{\oplus} \partial_k \frac{dk}{2\pi})$.

Damit kann man aber (4.14) lesen als

$$\int_{[0,2\pi)}^{\oplus} \partial_k \frac{dk}{2\pi} \circ Uf = U \partial f.$$

Es ist also $U^{-1}\int_{[0,2\pi)}^{\oplus} \partial_k \frac{dk}{2\pi} U$ eine selbstadjungierte Fortsetzung der Restriktion von ∂ auf $C_0^\infty(\mathbb{R})$, die aber wesentlich selbstadjungiert ist, so daß $U^{-1}\int_{[0,2\pi)}^{\oplus} \partial_k \frac{dk}{2\pi} U$ und ∂ übereinstimmen müssen.

c) Wegen b) ist die Form wohldefiniert und zusammen mit der Isometrie von U folgt:

$$d(f) = \|\partial f\|^2 = \|U\partial f\|^2 = \left\| \int_{[0,2\pi)}^{\oplus} \partial_k \frac{dk}{2\pi} \circ Uf \right\|^2$$

$$= \int_0^{2\pi} \|\partial_k U_k f\|^2 \frac{dk}{2\pi} = \int_0^{2\pi} d_k(U_k f)\frac{dk}{2\pi} \qquad (f \in H^1(\mathbb{R})).$$

d) Für $f \in H^1(\mathbb{R})$ ist $k \mapsto \int_0^1 V(U_k f)$ meßbar, und nach Satz 4.2 c) gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$\int_0^{2\pi} |v_k(U_k f)| \frac{dk}{2\pi} \leq \epsilon \int_0^{2\pi} d_k(U_k f)\frac{dk}{2\pi} + \delta \int_0^{2\pi} \|U_k f\|^2 \frac{dk}{2\pi} = \epsilon d_k(f) + \delta \|f\| < \infty,$$

wobei im letzen Schritt c) und die Isometrie von U ausgenutzt wurden. Daraus folgt die Behauptung.

e) Es wird die Gleichung

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)k} \frac{dk}{2\pi} = \delta_{n,m} \qquad (n, m \in \mathbb{Z}) \tag{4.16}$$

verwendet, die man direkt nachrechnet. Sei $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Dann gilt mit (4.16) und dem Satz von Fubini :

$$\int_0^{2\pi} v_k(U_k f) \frac{dk}{2\pi} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 V(x) \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{ink} f(x+n) \right|^2 dx \frac{dk}{2\pi}$$

$$= \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)k} \frac{dk}{2\pi} \int_0^1 \overline{f(x+m)} f(x+n) V(x) dx$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^1 |f(x+n)|^2 V(x) dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^1 |f(x+n)|^2 V(x+n) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |f|^2 V = v(f).$$

f) folgt aus c) und d).

g) Aus c) und e) folgt

$$h_0(f) = \int_{[0,2\pi)}^{\oplus} h_k \frac{dk}{2\pi} \circ Uf \qquad (f \in C_0^\infty(\mathbb{R})). \tag{4.17}$$

Bekanntlich ist $C_0^\infty(\mathbb{R})$ ein "core" für ∂. Nach Lemma 4.1 ist es damit auch ein Formcore für $\int_{[0,2\pi)}^{\oplus} d_k \frac{dk}{2\pi} \circ U$. Nach [K, Theorem VI-1.33] ist mit Satz 4.2 c) und d) bzw. Lemma 4.9 d) und f) der Raum $C_0^\infty(\mathbb{R})$ ein Formcore für h_0 und $\int_{[0,2\pi)}^{\oplus} h_k \frac{dk}{2\pi} \circ U$. □

Satz 4.10 :

Es ist
$$U^{-1} \int_{[0,2\pi)}^{\oplus} H_0(k) \frac{dk}{2\pi} U = H_0.$$

Beweis :

Zunächst wird gezeigt

$$D\Big(\int_{[0,2\pi)}^{\oplus} H_0(k) \frac{dk}{2\pi} \circ U\Big) \subset D\Big(\int_{[0,2\pi)}^{\oplus} h_k \frac{dk}{2\pi} \circ U\Big) = D\Big(\int_{[0,2\pi)}^{\oplus} d_k \frac{dk}{2\pi} \circ U\Big). \tag{4.18}$$

Für $k \in [0, 2\pi)$ ist nach Satz 4.3 $D(H_0(k)) \subset D(d_k)$.

Sei $f \in D\big(\int_{[0,2\pi)}^{\oplus} H_0(k) \frac{dk}{2\pi} \circ U\big)$, d.h. für $k \in [0, 2\pi)$ ist $U_k f \in D(H_0(k))$, und es gelten

$$\int_0^{2\pi} \|U_k f\|^2 \frac{dk}{2\pi} < \infty \qquad \text{sowie} \qquad \int_0^{2\pi} \|H_0(k) U_k f\|^2 \frac{dk}{2\pi} < \infty.$$

Dann bleibt zu zeigen

$$\int_0^{2\pi} d_k(U_k f) \frac{dk}{2\pi} < \infty.$$

Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung gilt:

$$\left| \int_0^{2\pi} h_k(U_k f) \frac{dk}{2\pi} \right|^2 \le \left| \int_0^{2\pi} (U_k f, H_0(k) U_k f) \frac{dk}{2\pi} \right|^2 \le \int_0^{2\pi} \|U_k f\|^2 \frac{dk}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|H_0(k) U_k f\|^2 \frac{dk}{2\pi}. \tag{4.19}$$

Wegen der Formbeschränktheit (Satz 4.2c)) gibt es ein $\epsilon \in (0,1)$ und ein $\delta > 0$, so daß

$$h_k(\psi) = v_k(\psi) + d_k(\psi) \geq (1-\epsilon) d_k(\psi) - \delta \|\psi\|^2 \qquad (k \in \mathbb{R},\ \psi \in D(H_0(k))).$$

Zusammen mit (4.19) folgt

$$\infty > \frac{1}{1-\epsilon} \int_0^{2\pi} h_k(U_k f) \tfrac{dk}{2\pi} + \frac{\delta}{1-\epsilon} \int_0^{2\pi} \|U_k f\|^2 \tfrac{dk}{2\pi} \geq \int_0^{2\pi} d_k(U_k f) \tfrac{dk}{2\pi} \geq 0.$$

Also gilt (4.18).

Mit Lemma 4.9 g) folgt für $f \in D(\int_{[0,2\pi)}^{\oplus} h_k \tfrac{dk}{2\pi} \circ U)$ und $g \in D(\int_{[0,2\pi)}^{\oplus} H_0(k) \tfrac{dk}{2\pi} \circ U)$

$$h_0(f,g) = \int_0^{2\pi} h_k(U_k f, U_k g) \tfrac{dk}{2\pi} = \int_0^{2\pi} (U_k f, H_0(k) U_k g) \tfrac{dk}{2\pi}$$

$$= (Uf, \int_{[0,2\pi)}^{\oplus} H_0(k) \tfrac{dk}{2\pi} \circ Ug) = (f, U^{-1} \int_{[0,2\pi)}^{\oplus} H_0(k) \tfrac{dk}{2\pi}\, Ug).$$

Nach [K, VI-Corollary 2.4, p.323] folgt

$$U^{-1} \int_{[0,2\pi)}^{\oplus} H_0(k) \tfrac{dk}{2\pi}\, U \subset H_0,$$

und wegen der Selbstadjungiertheit von H_0 und $\int_{[0,2\pi)}^{\oplus} H_0(k) \tfrac{dk}{2\pi}$ sind die Operatoren gleich$\square$

5. Analyse von $\mathbf{H_0}$

In diesem Kapitel wird das Spektrum des Operators H_0 untersucht. Wie in Satz 4.10 gezeigt, ist der Operator H_0 unitäräquivalent zum Operator $\int_{[0,2\pi)}^{\oplus} H_0(k) \tfrac{dk}{2\pi}$, und es kann ausgenutzt werden, daß das Spektrum eines derartigen Operators über die Spektren seiner Faseroperatoren bestimmt ist.

Daher werden zunächst die Spektren der Faseroperatoren untersucht. Wie in Satz 4.8 c) gesehen, handelt es sich bei $H_0(\cdot)$ um eine analytische Funktion im Sinne von Kato, so daß die analytische Störungstheorie[12] angewendet werden kann. Ferner wird die Theorie über die Entartung des Grundzustandes, d.h. des niedrigsten Eigenwertes von selbstadjungierten Operatoren, verwendet[13]. Außerdem benötigt man aus der Theorie der Differentialgleichungen den Begriff der Diskriminante. Dazu

Lemma 5.1 :

Es sei die sogenannte Diskriminante $D(E) := f_+(1,E) + f_-'(1,E)$ für alle $E \in \mathbb{C}$, wobei $\{f_+(\cdot,E), f_-(\cdot,E)\}$ das Fundamentalsystem aus Lemma 4.5 ist. Dann gelten:

a) Es ist D eine ganze, reellanalytische Funktion;

b) und für alle $k, E \in \mathbb{C}$ ist E genau dann Eigenwert von $H_0(k)$, wenn $D(E) = 2cos(k)$ ist.

Beweis :

a) folgt aus Lemma 4.5 c).

b) Seien $E, k \in \mathbb{R}$.

1. Behauptung :

Es ist E genau dann Eigenwert von $H_0(k)$, wenn e^{ik} Eigenwert der Matrix

$$M(E) := \begin{pmatrix} f_+(1,E) & f_-(1,E) \\ f_+'(1,E) & f_-'(1,E) \end{pmatrix}$$

ist.

Beweis :

"$\Rightarrow$" Sei E Eigenwert von $H_0(k)$ mit Eigenfunktion $u(\cdot,E)$.Dann löst $u(\cdot,E)$ die DGL

$$(-\Delta + V(x) - E)u(x) = 0 \qquad (x \in ([0,1]). \tag{5.1}$$

Damit ist

$$u = u(0)f_+ + u'(0)f_- \quad , \tag{5.0}$$

[12]siehe [R\S-IV, Chapter XII.2]

[13]siehe [R\S-IV, Chapter XII.12]

wobei das Argument E weggelassen wird. Die Gleichung (5.0) und ihre Ableitung liefern

$$\begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_+ & f_- \\ f_+{}' & f_-{}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u'(0) \end{pmatrix},$$

so daß das Auswerten bei 1 unter Berücksichtigung der Randbedingungen liefert:

$$M \begin{pmatrix} u(0) \\ u'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(1) \\ u'(1) \end{pmatrix} = e^{ik} \begin{pmatrix} u(0) \\ u'(0) \end{pmatrix}.$$

Als Eigenfunktion kann u nicht verschwinden, d.h. $u(0) = u'(0) = 0$ gilt nicht, so daß "$\Rightarrow$" gezeigt ist.

"$\Leftarrow$" Ist e^{ik} Eigenwert von $M(E)$, dann gibt es einen Eigenvektor $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, und

$$u := a\ f_+ + b\ f_- \tag{5.0}$$

erfüllt die DGL (5.1). Es sind $u(0) = a,\ u'(0) = b$ und

$$\begin{pmatrix} u(1) \\ u'(1) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = e^{ik} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = e^{ik} \begin{pmatrix} u(0) \\ u'(0) \end{pmatrix},$$

d.h. es ist $u \in D(H_0(k))$. Wegen $\begin{pmatrix} u(0) \\ u'(0) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist damit u Eigenfunktion.

Es ist $\lambda \in \mathbb{C}$ genau dann Eigenwert von $M(E)$, wenn λ Lösung der charakteristischen Gleichung

$$\chi^2 - \chi D(E) + det\ M(E) = 0$$

ist. Äquivalent dazu : Es ist $\{\lambda, \mu\} \subset \mathbb{C}$ genau dann die Menge der Eigenwerte, wenn gilt

$$\lambda + \mu = D(E) \tag{5.1 a}$$

und
$$\lambda + \mu = det\ M(E) = 1. \tag{5.1 b}$$

Sei nun e^{ik} Eigenwert von $M(E)$. Dann ist mit (5.1 b) auch e^{-ik} Eigenwert und mit (5.1 a) folgt $D(E) = 2cos\ k$. Wenn $D(E) = 2cos\ k$ ist, dann erfüllen $\lambda = e^{ik}$ und $\mu = e^{-ik}$ die Gleichungen (5.1 a) und (5.1 b) und sind damit Eigenwerte von $M(E)$. □

Satz 5.2 :

Sei $k \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

a) $H_0(k)$ hat rein diskretes Spektrum,

b) $H_0(k)$ und $H_0(2\pi - \overline{k})$ haben konjugiert komplexe Eigenwerte und Eigenfunktionen,

c) $H_0(k)^* = H_0(\overline{k})$, insbesondere haben $H_0(k)$ und $H_0(\overline{k})$ konjugiert komplexe Eigenwerte,

d) $H_0(k)$ und $H_0(2\pi - k)$ haben gleiche Eigenwerte und

e) die Eigenwerte von $H_0(k)$ sind höchstens zweifach entartet und wenn k kein ganzzahliges Vielfaches von π ist, sind die Eigenwerte von $H_0(k)$ nicht entartet.

Sei $n \in \mathbb{N}$. Für $k \in (0,\pi) \cup (\pi, 2\pi)$ bezeichne $E_n(k)$ den n-ten Eigenwert und $u_n(k)$ die zugehörige Eigenfunktion. Dann gelten

f) Zu jedem $\epsilon \in (0, \frac{\pi}{2})$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß sich E_n und u_n reellanalytisch auf $R_{\epsilon,\delta} := \{z \in \mathbb{C} \mid Rez \in (\epsilon, \pi - \epsilon), Imz \in (-\delta, \delta)\}$ und stetig in 0 und π fortsetzen lassen, wobei die Fortsetzungen auch mit E_n und u_n bezeichnet werden (es sind also E_n und u_n reellanalytisch in $\bigcup_{\epsilon \in (0,\frac{\pi}{2})} U_\epsilon$).

g) Für ungerades (gerades) $n \in \mathbb{N}$ ist E_n streng monoton steigend (fallend).

Beweis :

Sei $k \in \mathbb{C}$.

a) folgt aus [R\S-IV, Theorem XIII.64], weil $H_0(k)$ nach Satz 4.8 a) eine kompakte Resolvente hat.

b) Sei $E \in \mathbb{C}$ Eigenwert von $H_0(k)$ mit Eigenfunktion $u(\cdot, k, E) \neq 0$, also $u(\cdot, k, E) \in D(H_0(k))$ und Lösung der DGL (5.1).

Dann ist $\overline{u(x,k,E)} \in D(H_0(\overline{k}))$, und weil V reellwertig ist, gilt

$$(-\Delta + V(x) - \overline{E})\overline{u(x,k,E)} = 0 \qquad (x \in ([0,1]),$$

d.h. $\overline{E}$ ist Eigenwert von $H_0(\overline{k})$ mit Eigenfunktion $\overline{u(\cdot,k,E)}$. Aus

$$2\pi - \overline{(2\pi - \overline{k})} = k$$

folgt auch die andere Richtung der Äquivalenz.

c) Seien $u \in D(H_0(k))$ und $v \in D(H_0(\overline{k}))$, dann ist mit partieller Integration:

$$\begin{aligned}(v, H_0(k)u) &= \int_0^1 \overline{v}(-\Delta + V)u = -\overline{v}u' + \overline{v}'u\Big|_0^1 + \int_0^1 \overline{((-\Delta+V)v)}u \\ &= -(\overline{e^{ik}v(0)}e^{ik}u'(0)) + \overline{e^{ik}v'(0)}e^{ik}u(0) \\ &\quad + \overline{v(0)}u'(0) - \overline{v'(0)}u(0) + (H_0(\overline{k})v, u) \\ &= (H_0(\overline{k})v, u),\end{aligned}$$

d.h. es gilt $H_0(\overline{k}) \subset H_0(k)^*$. Die umgekehrte Inklusion folgt wegen

$$H_0(k)^* = H_0(\overline{\overline{k}})^* \subset H_0(\overline{k})^{**} = \overline{H_0(\overline{k})}$$

und der Abgeschlossenheit von $H_0(k)$ (Satz 4.8 c)).

d) folgt direkt aus b) und c).

e) Sei E Eigenwert von $H_0(k)$. Da jede Eigenfunktion zu E auch Lösung der DGL (5.1) sein muß, deren Lösungsraum zweidimensional ist, kann E nicht mehr als zweifach entartet sein.
Sei nun k zusätzlich kein ganzzahliges Vielfaches von π. Sei weiter E Eigenwert von $H_0(k)$ mit der Eigenfunktion $u(\cdot, E)$. Nach d) ist E auch Eigenwert von $H_0(2\pi - k)$; sei $v(\cdot, E)$ die zugehörige Eigenfunktion. Das zweite Argument in u und v wird im folgenden weggelassen. Seien $a, b \in \mathbb{C}$ mit

$$0 = au + bv.$$

Das Auswerten bei 0 und 1 unter Berücksichtigung der unterschiedlichen Randbedingungen liefert

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{ik} & e^{i(2\pi - k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\ u(0) \\ b\ v(0) \end{pmatrix}. \tag{5.2}$$

Da die Matrix regulär ist, hat das Gleichungssystem nur die triviale Lösung:

$$au(0) = bv(0) = 0. \tag{5.3}$$

Mit dem analogen Argument erhält man :

$$au'(0) = bv'(0) = 0. \tag{5.4}$$

Wären $u(0) = u'(0) = 0$ bzw. $v(0) = v'(0) = 0$, dann wäre u bzw. v die triviale Lösung. Deshalb muß gelten $a = b = 0$, d.h. u und v sind linear unabhängig. Als DGL zweiter Ordnung hat (5.1) einen zweidimensionalen Lösungsraum, also ist $\{u, v\}$ ein Fundamentalsystem.
Sei $\tilde{u}$ eine Eigenfunktion von $H_0(k)$ zum Eigenwert E. dann gibt es $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ mit

$$\tilde{u} = \alpha u + \beta v.$$

Wiederum ergibt die Auswertung bei 0 und 1 unter Berücksichtigung der Randbedingungen:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ e^{ik} \end{pmatrix} \tilde{u}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{ik} & e^{i(2\pi - k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha\, u(0) \\ \beta\, v(0) \end{pmatrix}, \tag{5.5}$$

und aus der Regularität der Matrix folgt

$$\begin{aligned} \tilde{u}(0) &= \alpha u(0) \\ 0 &= \beta v(0) \,. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Mit der analogen Argumentation für die Ableitungen bekommt man

$$\begin{aligned} \tilde{u}'(0) &= \alpha u'(0) \\ 0 &= \beta v'(0) \,. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Aus (5.6) und (5.7) folgt $\beta = 0$, d.h. $\tilde{u} = \alpha u$, d.h. die Behauptung gilt.

f) 1. Behauptung:

Es ist $E_1(0)$, der kleinste Eigenwert von $H_0(0)$, nicht entartet und hat eine Eigenfunktion $u(\,\cdot\,, E_1(0))$, die fast überall positiv ist.

Beweis:

Es werden im folgenden die Bezeichnungen aus [R\S-IV, Chapter XIII.12] verwendet. Es wird $H_0(0)$ als Störung des Operators

$$-\partial^2(0)\varphi = -\varphi'' \qquad (\varphi \in D(-\partial^2(0)))$$

mit $$D(-\partial^2(0)) := \{\varphi \in AC([0,1]) \mid \varphi' \in AC([0,1]),\ -\varphi'' \in L^2([0,1]),\ \varphi(1) = \varphi(0),\ \varphi'(1) = \varphi'(0)\}$$

aufgefaßt, der mit Satz 4.3 der zu d_0 assozierte Operator ist. Nach [R\S-IV, Lemma p.292] ist für alle $t > 0$ der Operator $e^{-t(-\partial^2(0))}$ positivitätsverbessernd, so daß es nach [R\S-IV, Theorem XIII.44] ein $t > 0$ gibt, für das $e^{-t(-\partial^2(0))}$ ergodisch ist. Nach [R\S-IV, Theorem XIII.43] gibt es dann ein $t > 0$, so daß $\{e^{-t(-\partial^2(0))}\} \cup L^\infty([0,1])$ auf $L^2([0,1])$ irreduzibel operiert. An dieser Stelle kann der Störungssatz [R\S-IV, Theorem XIII.45] angewendet werden. Seien dazu für alle $N \in \mathbb{N}$

$$V_N(x) := \begin{cases} V(x) & \text{für alle } x \in [0,1] \text{ mit } |V(x)| \leq N \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$v_N := \int_{\mathbb{R}} V_N |\psi|^2 \qquad (\psi \in D(d_0))$$

die nach Satz 4.2 c) wohldefinierten Formen und $H_0(0) - V_N$ sowie $-\partial^2(0) + V_N$ über den Darstellungssatz definiert. Als Voraussetzungen des Störungssatzes sind zu zeigen:

(i) Es sind $H_0(0) - V_N$ und $-\partial^2(0) + V_N$ uniform in N halbbeschränkt;

(ii) es konvergiert $\{H_0(0) - V_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ im starken Resolventensinn gegen $-\partial^2(0)$;

(iii) und es konvergiert $\{-\partial^2(0) + V_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ im starken Resolventensinn gegen $H_0(0)$.

Zu (i) überlegt man sich zunächst, daß nach Satz 4.2 die Form

$$|v|(\psi) := \int_0^1 |V||\psi|^2 \qquad (\psi \in D(d_0))$$

wohldefiniert und relativ formbeschränkt bezüglich d_0 mit Grenze 0 ist.
Seien $\psi \in D(d_0), \epsilon \in (0,\frac{1}{2})$ und $\delta > 0$, so daß

$$|\, v \,|(\psi) \leq \epsilon d_0(\psi) + \delta \,\|\, \psi \,\|^2$$

und $N \in \mathbb{N}$. Dann gelten

$$|(v - v_N)(\psi)| \leq \int_0^1 |\, V - V_N \,|\, |\, \psi \,|^2 \leq \int_0^1 |\, V \,|\, |\, \psi \,|^2 = |\, v \,|(\psi) \tag{5.8}$$

sowie
$$|\, v_N(\psi) \,| \leq \int_0^1 |\, V_N \,|\, |\, \psi \,|^2 \leq \int_0^1 |\, V \,|\, |\, \psi \,|^2 = |\, v \,|(\psi)\,. \tag{5.9}$$

Dann folgt einerseits mit (5.8)

$$|\,(h_{k=0} - v_N)(\psi)\,| \geq d_0(\psi) - |\,(v - v_N)(\psi)\,| \geq d_0(\psi) - |\, v \,|(\psi)$$

$$\geq (1-\epsilon)\; d_0(\psi) - \delta \,\|\, \psi \,\|^2 \geq -\delta \,\|\, \psi \,\|^2$$

sowie andererseits mit (5.9)

$$|\,(d_0 + v_N)(\psi)\,| \geq d_0(\psi) - |\, v_N(\psi) \,| \geq d_0(\psi) - |\, v \,|(\psi)$$

$$\geq (1-\epsilon)\; d_0(\psi) - \delta \,\|\, \psi \,\|^2 \geq -\delta \,\|\, \psi \,\|^2.$$

Es ist also insbesondere $-\delta$ untere Schranke für die zugehörigen Operatoren $H_0(0) - V_N$ und $-\partial^2(0) + V_N$, d.h. (i) gilt.
Weiterhin ist

$$h_{k=0}(\psi) = d_0(\psi) + v(\psi) \geq d_0(\psi) - |\, v \,|(\psi) \geq (1-\epsilon)\; d_0(\psi) - \delta \,\|\, \psi \,\|^2 \tag{5.10}$$

daraus folgt, daß

$$\frac{|\, v - v_N(\psi) \,|}{(h_{k=0} + \delta + 1)(\psi)} \leq \|\, V - V_N \,\|_1 \frac{\epsilon d_0(\psi) + \delta \,\|\, \psi \,\|^2}{(1-\epsilon) d_0(\psi) + \|\, \psi \,\|^2} \leq \delta \,\|\, V - V_N \,\|_1 \tag{5.11}$$

und

$$\frac{|\, v - v_N(\psi) \,|}{(d_0 + \delta + 1)(\psi)} \leq \|\, V - V_N \,\|_1 \frac{\epsilon d_0(\psi) + \delta \,\|\, \psi \,\|^2}{d_0(\psi) + (\delta + 1) \,\|\, \psi \,\|^2} \leq \|\, V - V_N \,\|_1 \tag{5.12}$$

gelten, so daß unter Anwendung von [R\S-I, Theorem VIII.25 c)] auf die nach Addition von δ positiven Operatoren (ii) aus (5.11) folgt und (iii) aus (5.12).
"Der Rückweg" über [R\S-IV, Theorem XIII.44, Theorem XIII.45] liefert dann die Behauptung.

Aufgrund der Analytizität von $H_0(\cdot)$ gibt es nach [R\S-IV, Theorem XII.8] ein $\epsilon \in (0, \pi)$ und eine reellanalytische Funktion f_1 mit $D(f_1) \supset [0, \epsilon)$, für die gilt:

- Es ist $f_1(k)$ Eigenwert von $H_0(k)$ für alle $k \in [0, \epsilon)$,
- und $f_1(0) = E_1(0)$.

2. Behauptung:

Wenn f_1 in $[0, \epsilon)$ beschränkt ist, dann läßt es sich über ϵ hinaus analytisch fortsetzen.

Beweis:

Wenn f_1 beschränkt ist, dann hat jede Folge $\{k_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ mit $k_m \in [0, \epsilon)$ und $k_m \to \epsilon \ (m \to \infty)$ eine Teilfolge $\{k_{m_l}\}_{l \in \mathbb{N}}$, für die $\{f_1(k_{m_l})\}_{l \in \mathbb{N}}$ konvergiert.
Sei o.b.d.A. $\{f_1(k_m)\}_{m \in \mathbb{N}}$ konvergent mit $\tilde{E} := \underline{lim}_{m \to \infty} f_1(k_m)$.

Behauptung:

$\tilde{E}$ ist Eigenwert von $H_0(\epsilon)$.

Beweis:

Angenommen $\tilde{E}$ wäre kein Eigenwert von $H_0(\epsilon)$. Es wäre dann $\tilde{E} \in \rho(H_0(\epsilon))$ und nach [R\S-IV, Theorem XII.7] gäbe es eine Umgebung von $\langle \epsilon, \tilde{E} \rangle$, so daß dort die Resolvente analytisch wäre. Das kann aber nicht sein, weil einerseits $\{\langle k_m, f_1(k_m) \rangle\}_{m \in \mathbb{N}}$ gegen $\langle \epsilon, \tilde{E} \rangle$ konvergiert und andererseits für kein $m \in \mathbb{N}$ die Resolvente $(H_0(k_m) - f_1(k_m))^{-1}$ überhaupt existiert, da $f_1(k_m)$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ Eigenwert von $H_0(k_m)$ ist. Damit gilt die Behauptung.

Jetzt wendet man [R\S-IV, Theorem XII.8] auf den nach e) einfachen Eigenwert $\tilde{E}$ von $H_0(\epsilon)$ an.Damit kann man ein $\delta > 0$ finden sowie eine reellanalytische Funktion $\tilde{E}$ mit $D(\tilde{E}) \supset (\epsilon - \delta, \epsilon + \delta)$, so daß gilt:

- Für alle $k \in (\epsilon - \delta, \epsilon)$ ist $\tilde{E}(k)$ einziger Eigenwert von $H_0(k)$ in der Nähe von $\tilde{E}$
- und $\tilde{E}(\epsilon) = \tilde{E}$.

Es muß also für große m gelten: $\tilde{E}(k_m) = f_1(k_m)$ und damit ist $\tilde{E} \cup f_1$ eine analytische Fortsetzung von f_1 über ϵ hinaus.

Unter der Voraussetzung, daß f_1 beschränkt bleibt, kann man f_1 immer weiter fortsetzen. D.h. es gibt kein maximales $\epsilon \in (0, \pi)$.

3. Behauptung:

Es ist $\sigma(H_0(k))$ nach unten uniform in k beschränkt.

Beweis:

Nach Satz 4.2 c) gibt es ein $\epsilon \in (0,1)$ und ein $\delta > 0$, so daß für alle $k \in \mathbb{R}$ gilt:

$$h_k(\psi) = d_k(\psi) - |\, v_k(\psi)\,| \geq (1-\epsilon)\; d_k(\psi) - \delta \,\|\, \psi \,\|^2 \geq -\delta \,\|\, \psi \,\|^2 \quad (\psi \in D(d_k)). \quad (5.13)$$

Seien nun $k \in \mathbb{R}$ und E Eigenwert von $H_0(k)$ mit normierter Eigenfunktion u. Dann folgt aus (5.13)

$$E = (u, H_0(k)u) = h_k(u) \geq -\delta,$$

d.h. $-\delta$ ist in k uniforme untere Schranke für $\sigma(H_0(k))$.

4. Behauptung:

Für alle $k \in [0,\epsilon)$ ist $f_1(k) = inf\ \sigma(H_0(k))$.

Beweis:

Angenommen es gäbe ein $k_0 \in (0,\epsilon)$ mit $f_1(k_0) > inf\ \sigma(H_0(k_0))$, also einen einfachen Eigenwert $\tilde{E}$ von $H_0(k_0)$ mit $f_1(k_0) > \tilde{E}$. Nach [R\S-IV, Theorem XII.8] gäbe es ein $\delta > 0$, so daß $(k_0 - \delta, k_0 + \delta) \subset (0,\epsilon)$ ist, und eine rellanalytische Funktion g mit $D(g) = (k_0 - \delta, k_0 + \delta)$, für die gilt:

- Es ist $g(k)$ Eigenwert von $H_0(k)$ für alle $k \in (k_0 - \delta, k_0 + \delta)$
- und $\tilde{E} = g(k_0)$.

Nun ist g nach oben durch f_1 beschränkt, weil sonst g und f_1 sich schneiden müßten, wobei der Schnittpunkt nach [R\S-IV, Theorem XII.8] doppelter Eigenwert wäre, was e) widersprechen würde. Mit der 3. Behauptung ist g auch nach unten beschränkt, und man zeigt analog zur 2. Behauptung, daß g eine analytische Fortsetzung $\tilde{g}$ bis $k = 0$ hat, die kleinster Eigenwert bleibt. Es müßte dann aber nach [R\S, Theorem XII.8] $E_1(0)$ doppelter Eigenwert von $H_0(0)$ sein. Das ist ein Widerspruch zur 1. Behauptung.

5. Behauptung:

Es ist f_1 auf $[0,\epsilon)$ beschränkt.

Beweis :

Betrachte $E_1(\epsilon)$, den kleinsten Eigenwert von $H_0(\epsilon)$. Nach [R\S-IV, Theorem XII.8] gibt es ein $\delta > 0$ und eine reellaanalytische Funktion h mit $D(h) \supset (\epsilon - \delta, \epsilon + \delta)$ und $\delta + \epsilon < \pi$, für die gilt:

- Es ist $h(k)$ Eigenwert von $H_0(k)$ für alle $k \in (\epsilon - \delta, \epsilon + \delta)$
- und $E_1(\epsilon) = h(\epsilon)$.

Dann ist mit der 4. Behauptung

$$h(k) \geq f_1(k) \qquad (k \in (\epsilon - \delta, \epsilon));$$

also ist wegen der 3. Behauptung f_1 in $[\epsilon - \frac{\delta}{2}, \epsilon)$ beschränkt. Auf $[0, \epsilon - \frac{\delta}{2}]$ ist f_1 ohnehin beschränkt, d.h. die 5. Behauptung gilt.

Mit der 2. und 5. Behauptung ist klar, daß f_1 eine analytische Fortsetzung auf $(0, \pi)$ hat.

Nun zur Stetigkeit von $f_1 = E_1$ bei π. Wie in der 2. Behauptung überlegt man sich, daß $\tilde{E} := \lim_{k \to \pi} E_1(k)$ Eigenwert von $H_0(\pi)$ ist. $E_1(\pi)$ kann zweifach entartet sein. In

diesem Fall gibt es mit [R\S-IV, Theorem XII.13] zwei reellanalytische Eigenwertzweige in der Nähe von $E_1(\pi)$, die sich wegen e) nicht schneiden können. Man definiert g als den Kleineren, d.h. man hat ein $\delta > 0$ und eine reellanalytische Funktion g mit

$D(g) \supset (\pi - \delta, \pi + \delta)$, für die gilt

- Es ist $g(k)$ Eigenwert von $H_0(k)$ für $k \in (\pi - \delta, \pi]$
- und $g(\pi) = E_1(\pi)$.

Ist $E_1(\pi)$ nicht entartet, gibt es ohnehin ein solches g.

Angenommen $\tilde{E} > E_1(\pi)$. Dann wäre für jene k, die nur wenig kleiner sind als π: $E_1(k) > g(k)$, und damit $E_1(\pi)$ nicht mehr der kleinste Eigenwert, was der 4. Behauptung widersprechen würde.

Also ist E_1 bei π stetig.

Es kann $E_2(0)$ zweifach entartet oder ein einfacher Eigenwert sein. Wie beim Stetigkeitsargument oben definiert man (wenn nötig über den kleineren von zwei Eigenwertzweigen) ein f_2 und argumentiert dann wie für f_1.

Die Konstruktion der U_ϵ läuft über den Satz von Heine-Borel, wobei die lokale Analytizität wieder aus [R\S-IV, Theorem XII.8] folgt.

Es gelten die Aussagen über die u_n, weil [R\S-IV, Theorem XII.8] und [R\S-IV, Theorem XII.13] jeweils die Analytizität der u_n mitliefern und man analog argumentieren kann.

g) Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann sind die Restriktionen von D und E_n auf $\mathbb{R}$ reellwertig nach Lemma 5.1 a) bzw. wegen der Selbstadjungiertheit von $H_0(k)$ für reelle k. Für die folgende Betrachtung sollen D und E_n als Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ aufgefaßt werden. Nach Lemma 5.1 b) ist

$$D(E_n(k)) = 2 \cos k \qquad (k \in \mathbb{R}) \tag{5.14 a}$$

und nach der Kettenregel folgt

$$D'(E_n(k)) \cdot E_n{}'(k) = -2 \; sin \; k \qquad (k \in \mathbb{R}), \qquad (5.14 \text{ b})$$

d.h. es kann weder D' in $E_n((0,\pi))$ noch $E_n{}'$ in $(0,\pi)$ eine Nullstelle haben. Damit sind D in $E_n([0,\pi])$ und E_n in $[0,\pi]$ streng monoton.

Ob bei $k = 0$ oder $k = \pi$ doppelte Eigenwerte auftreten, hängt mit dem Verhalten von $D \circ E_n$ zusammen:

1. Behauptung :

Es ist $E_n(0)$ $(E_n(\pi))$ genau dann ein Maximum (Minimum) von D, wenn $E_n(0)$ $(E_n(\pi))$ doppelter Eigenwert von $H_0(0)$ $(H_0(\pi))$ ist.

Beweis :

Es wird nur $E_n(0)$ betrachtet, da $E_n(\pi)$ analog geht.

"$\Rightarrow$" Sei $E_n(0)$ doppelter Eigenwert von $H_0(0)$. Für k in der Nähe von 0 gibt es nach [R\S-IV, Theorem XII.13] zwei Eigenwerte von $H_0(k)$, E und $\tilde{E}$, in der Nähe von $E_n(0)$, und es ist $D(E) = 2cosk = D(\tilde{E})$. Also können E und $\tilde{E}$ nicht im gleichen Monotonieintervall von D liegen, weil sie sonst gleich wären. Damit müssen sich bei $E_n(0)$ zwei Monotonieintervalle von D treffen; d.h. D muß bei 0 ein Maximum haben, weil auch cos bei 0 ein Maximum besitzt.

"$\Leftarrow$" Sei $E_n(0)$ Maximum von D. Mit (5.14) ist $D(E_n(0)) = 2$. Wegen der Monotonie von E_n in $[0,\pi]$ gilt

$$E_n(k) < E_n(0) \qquad (k \in (0,\pi)) \qquad (5.15)$$

oder

$$E_n(k) > E_n(0) \qquad (k \in (0,\pi)).$$

O.b.d.A. gelte (5.15). Da $E_n(0)$ Maximum von D ist, gibt es ein $\epsilon > 0$, so daß $E \in (E_n(0), \epsilon)$ gilt $D(E) < 2$. Wegen der Stetigkeit von D und cos gibt es also zu jedem k in der Nähe von 0 ein $E \in (E_n(0), \epsilon)$, für das gilt $D(E) = 2 \; cos \; k$, d.h. E ist neben $E_n(k)$ weiterer Eigenwert von $H_0(k)$. Nach [R\S-IV, Theorem XII.8] kann also $E_n(0)$ kein einfacher Eigenwert sein.

2. Behauptung :

Es ist $\qquad E_1(0) \leq E_1(k) \qquad (k \in (0,\pi)).$

Beweis :

Es werden wieder die Bezeichnungen aus [R\S-IV, Chapter XIII.12] verwendet. Sei $m \in \mathbb{N}$. Analog wie bei $h_{k=0}$ überlegt man sich, daß durch

$$h^m_{k=0} := \int_{-m}^{m} |\psi'|^2 + V\,|\psi|^2 \qquad\qquad (\psi \in D(h^m_{k=0}))$$

mit $\quad D(h^m_{k=0}) = \{\psi \in AC([-m,m]) \mid \psi' \in L^2([-m,m]),\ \psi(m) = \psi(-m)\}$

(wobei die Einschränkung von V auf $[-m,m]$ auch mit V bezeichnet wird) eine symmetrische, halbbeschränkte und abgeschlossene Form definiert ist. Analog zu Satz 4.3 erhält man für den zugehörigen selbstadjungierten, halbbeschränkten Operator $H^m_0(0)$ den Definitionsbereich

$$D(H^m_0(0)) = \{\varphi \in AC([-m,m]) \mid \varphi' \in AC([-m,m]),\ -\varphi'' + V\varphi \in L^2([-m,m]),$$
$$\varphi(m) = \varphi(-m),\ \varphi'(m) = \varphi'(-m)\}\ .$$

Analog zur 1. Behauptung im Beweis von f) zeigt man, daß der Grundzustand $E^m_1(0)$ einfacher Eigenwert mit einer fast überall positiven Eigenfunktion $u^m_1(\cdot, E^m_1(0))$ ist. Wie im Beweis von Satz 6.2 ist ersichtlich, daß $\tilde{u}_1(\cdot, E_1(0))$, die periodische Fortsetzung von $u_1(\cdot, E_1(0))$, eine Eigenfunktion von $H^m_0(0)$ zum Eigenwert $E_1(0)$ ist, die fast überall positiv ist. Weil $u^m_1(\cdot, E^m_1(0))$ und $\tilde{u}_1(\cdot, E_1(0))$ fast überall positiv sind, ist

$$(\ u^m_1(\cdot, E^m_1(0))\ ,\ \tilde{u}_1(\cdot, E_1(0))\ ) > 0\ ,$$

d. h. es ist $E_1(0) = E^m_1(0)$ auch untere Schranke von $H^m_0(0)$ und damit von $h^m_{k=0}$. Also ist für alle $f \in C^\infty_0([-m,m])$

$$h_0(f) = h^m_{k=0}(f) \geq E_1(0)\, \|\, f\, \|^2.$$

Da $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} C^\infty_0([-m,m])$ dicht liegt in $L^2(\mathbb{R})$, ist $E_1(0)$ untere Schranke von h_0 und damit auch von H_0. Wegen $H_0 = \int^{\oplus}_{[0,2\pi)} H_0(k)\, \frac{dk}{2\pi}$ (Satz 4.10) folgt mit [R\S-IV,TheoremXIII.85 d)] für fast alle $k \in (0,\pi)$ die Beziehung $E_1(k) \geq E_1(0)$, so daß mit der Stetigkeit von E_1 die Behauptung gilt.

Wie verläuft die Funktion D?

Wie oben gesehen sind für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Funktionen D in $E_n([0,\pi])$ und E_n in $[0,\pi]$ streng monoton in entgegengesetztem Sinn. Wegen der 2. Behauptung kann E_1 in $[0,\pi]$ nur streng monoton steigend sein, d.h. D ist in $E_1([0,\pi])$ streng monoton fallend.

Nach der 1. Behauptung hat D in $E_1(0)$ kein Maximum. Da D den Wert 2 in $(-\infty, E_1(0))$ nicht mehr annehmen kann, weil sonst nach Lemma 5.1 b) die Zahl $E_1(0)$ nicht der kleinste Eigenwert von $H_0(0)$ wäre, ist $D(\,(-\infty, E_1(0))\,) \subset (2, \infty)$.
Bei $E_1(\pi)$ hat D entweder ein Minimum oder fällt weiter streng monoton. Im ersten Fall ist nach der 1. Behauptung $E_1(\pi) = E_2(\pi)$ ein doppelter Eigenwert von $H_0(\pi)$ und an das Intervall $E_1([0,\pi])$ schließt sich direkt das Intervall $E_2([0,\pi])$ an, in dem D streng monoton steigend ist. Im zweiten Fall sind $E_1(\pi)$ und $E_2(\pi)$ jeweils einfache Eigenwerte, es klafft eine Lücke zwischen $E_1(\pi)$ und $E_2(\pi)$, in der D ein Minimum hat.

In $E_2([0,\pi])$ steigt D streng monoton. Es ist nicht möglich, daß D in $(E_1(\pi), \infty)$ den Wert -2 nicht mehr annimmt. Denn dies hieße nach Lemma 5.1 b), daß das Spektrum des selbstadjungierten Operators $H_0(\pi)$ nur aus einem einzigen einfachen Eigenwert bestehen würde, was z.B. dem Spektralsatz widersprechen würde. Bei $E_2(0)$ muß man wieder zwei Fälle unterscheiden ...

Für ein gerades (ungerades) $n \in \mathbb{N}$ sind also D in $E_n([0,\pi])$ streng monoton steigend (fallend) und damit E_n in $[0,\pi]$ streng monoton fallend (steigend). □

Die Analyse von H_0 kann jetzt unter Verwendung von Satz 5.2 mit abstrakten Argumenten erfolgen.

Satz 5.3 :

a) Es ist $\sigma(H_0) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n([0,\pi])$.

b) H_0 hat keine Eigenwerte.

c) H_0 hat ein rein absolutstetiges Spektrum.

Beweis :

Der Beweis läuft vollkommen analog zum Beweis von [R\S-IV, Theorem XIII.90]. □

6. Eigenlösungen von H_0 und H

In diesem Kapitel wird die harte analytische Detailarbeit geleistet, die nötig ist, um die L^1-Störung zu kontrollieren.
Zunächst geht es darum, Eigenlösungen für die Operatoren H_0 und H zu konstruieren, wobei eine Eigenlösung definitionsgemäß lediglich die zum jeweiligen Operator gehörige Eigenwertdifferentialgleichung – hier sind das die Gleichungen (6.1) bzw. (6.12) – lösen muß, während eine Eigenfunktion zusätzlich im Definitionsbereich des Operators liegen muß.
Mit den Eigenlösungen werden die Greensfunktionen – für Werte E in der Resolventenmenge von H_0 bzw. H sind das auch die Integralkerne der Resolventen – von H_0 und H konstruiert. Dazu ist man nach der Weylschen Theorie der singulären DGLen zweiter Ordnung[14] an solchen Eigenlösungen interessiert, die an einem Randpunkt des betrachteten Intervalls – hier sind die Randpunkte $\pm\infty$ – zusammen mit ihrer Ableitung asymptotisch verschwinden. Für H_0 erhält man solche Eigenlösungen durch Fortsetzung der Eigenfunktionen der Faseroperatoren $H_0(k)$, was dank der Blochschen Randbedingung funktioniert. Für H ergeben sich die Eigenlösungen aus denen von H_0 als Lösungen von geeigneten Volterra-Integralgleichungen.
Im Hinblick auf die Eigenfunktionsentwicklung für H im 7. Kapitel und die Streutheorie im 8. Kapitel genügt es, Eigenwerte E zu betrachten, die in einer kleinen komplexen Umgebung vom Inneren der Bänder liegen.

An einer Stelle in Beweis von Satz 6.2 wird ein kleines Lemma aus der Sturm-Liouville-Theorie benötigt :

Lemma 6.1 :

Die sogenannten Dirichleteigenwerte von V sind reell, d.h. nur für $E \in \mathbb{R}$ kann eine Lösung u der DGL 5.1 existieren, die den sogenannten Dirichletrandbedingungen $u(0) = u(1) = 0$ genügt.

Beweis :

Das Argument steht z.B. bei [P/T, Theorem 3.1]. □

[14] siehe z.B. [J\R]

Satz 6.2 :

1) Es gibt ein zur reellen Achse symmetrisches $U \subset \mathbb{C}$, offen mit $U \cap \mathbb{R} = (0, \pi)$, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Für $E \in E_n(U)$ hat die DGL

$$(-\Delta + V(x) - E)u(x) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}) \qquad (6.1)$$

ein Fundamentalsystem $\{u_+(\cdot, E), u_-(\cdot, E)\}$ mit folgenden Eigenschaften:

a) Es gibt Darstellungen

$$u_\pm(x, E) = e^{\pm(-1)^n ik(E)x} p_\pm(x, E), \qquad (x \in \mathbb{R})$$

wobei $k: E_n(U) \rightarrow \mathbb{C}$ eine reellanalytische Funktion ist mit[15]

(i) $sgn\ Im\ (k(E)) = (-1)^n\ sgn\ Im(E)$ und

(ii) $\overline{k(E)} = k(\overline{E})$

sowie $p_\pm: \mathbb{R} \times E_n(U) \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:

(iii) Es sind $p_\pm(\cdot, E)$ und $D_1 p_\pm(\cdot, E)$ lokal absolutstetig und 1-periodisch.

(iv) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ sind $p_\pm(x, \cdot)$ und $D_1 p_\pm(x, \cdot)$ analytisch in $E_n(U)$.

(v) Es gelten

$$\overline{p_\pm(x, E)} = p_\mp(x, \overline{E}) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

(vi) Es sind $E \mapsto \| p_\pm(\cdot, E) \|_\infty$ und $E \mapsto \| D_1 p_\pm(\cdot, E) \|_\infty$ in $E_n(U)$ lokal beschränkt.

b) Es ist $W(u_-, u_+)(E) = \frac{1}{i}$.

c) Es ist

$$\overline{u_\pm(x, E)} = u_\mp(x, \overline{E}) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

2) Definiere $E_n^{\geq}(U) := \{z \in E_n(U) | Im z \geq 0\}$ und analog $E_n^{\leq}(U)$, $E_n^{=}(U)$, $E_n^{\neq}(U)$, $E_n^{<}(U)$ sowie $E_n^{>}(U)$. Dann gelten

---

[15] Es sei

$$sgn: \mathbb{R} \rightarrow \{1,0,-1\}$$

$$sgn(x) := \begin{cases} -1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}.$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} u_{\pm}(x,E) = 0 \qquad (E \in E_n^{>}(U))$$

und
$$\lim_{x \to \pm\infty} u_{\mp}(x,E) = 0 \qquad (E \in E_n^{<}(U)).$$

3) Es sind $u_{\pm}$ in $\mathbb{R} \times E_n(U)$ stetig.

Beweis :

1) Zunächst wird die Abbildung k konstruiert. Sei dazu

$$S := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < Rez < \pi \ \vee \ (Imz \geq 0 \wedge Rez = 0) \ \vee \ (Imz < 0 \wedge Rez = \pi)\}.$$

Nach [M, I.9.42] bildet g, die Restriktion von cos auf S, bijektiv auf $\mathbb{C}$ ab. Die Umkehrfunktion g^{-1} ist analytisch in $z \in \mathbb{C}$, falls gilt

$$(\partial cos)(g^{-1}(z)) = -sin(g^{-1}(z)) \neq 0,$$

d.h. falls $z \neq 1$ ist. Seien $f := g^{-1} \circ \frac{1}{2}D$, $\epsilon \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\delta > 0$, so daß E_n für alle $n \in \mathbb{N}$ in $R_{\epsilon,\delta} := \{z \in \mathbb{C} \mid Rez \in (\epsilon, \pi - \epsilon), Imz \in (-\delta, \delta)\}$ reellanalytisch ist (siehe Satz 5.2 f)), $k \in R_{\epsilon,\delta}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann ist, da $E_n(k)$ Eigenwert von $H_0(k)$ ist, nach Lemma 5.1 b)

$$cos\ k = \tfrac{1}{2}D(E_n(k)), \tag{6.2}$$

und wegen $k \in R_{\epsilon,\delta} \subset S = D(g)$ ist

$$f(E_n(k)) = g^{-1} \circ cos\ k = g^{-1} \circ g(k) = k,$$

d.h. $U \subset Ran\ f$ und die Restriktion der reellanalytischen Funktion f auf $E_n(U)$ ist die Inverse von E_n. Sie wird mit k bezeichnet.
Da D eine ganze, reellanalytische Funktion ist, gilt insbesondere für alle $x \in E_n((\epsilon, \pi - \epsilon))$ und alle $t \in [0, \infty)$ mit für alle $m \in \mathbb{N}_0$ reellen $(\partial^m D)(x)$

$$D(x \pm it) = \sum_{m>0} (\partial^m D)(x) \frac{(\pm it)^m}{m!} \ ,$$

d.h.
$$|\, D(x \pm it) - (D(x) \pm it(\partial D)(x))\, | \leq \left| \sum_{m \geq 2} (\partial^m D)(x) \frac{(\pm it)^m}{m!} \right|. \tag{6.3}$$

Seien $$M := max\left\{\left|D(z)\right| \mid z \in K_1(x) \quad (x \in E_n((\epsilon, \pi-\epsilon)) \text{ geeignet})\right\}$$

und $$C := min\left\{\left|(\partial D)(x)\right| \mid x \in E_n((\epsilon, \pi-\epsilon))\right\},$$

wobei mit der Kettenregel und der Monotonie von E_n aus (6.2) $C > 0$ folgt. Dann ist mit der Cauchy-Ungleichung[16] für die Einheitskugel eine uniforme Abschätzung der Koeffizienten in (6.3) möglich:

$$\left|\frac{(\partial^m D)(x)}{m!}\right| \leq max\left\{\left|D(z)\right| \mid z \in K_1(x)\right\} \leq M \qquad (x \in E_n((\epsilon, \pi-\epsilon)), m \in \mathbb{N}_0). \quad (6.4)$$

Aus (6.3) und (6.4) folgt mit $\tilde{\delta} := min\{\delta \, , \, \frac{1}{2} \, , \, \frac{C}{2M}\}$ für jedes $t \in (0, \tilde{\delta})$

$$\begin{aligned}
&|\pm t(\partial D)(x)| - |\pm t(\partial D)(x) - ImD(x \pm it)| \\
&\geq t\,|(\partial D)(x)| - \left|\sum_{m \geq 2} (\partial^m D)(x) \frac{(\pm it)^m}{m!}\right| \\
&\geq Ct - Mt^2 \frac{1}{1-t} \geq t(C - 2Mt) > 0 \qquad (x \in E_n((\epsilon, \pi-\epsilon))).
\end{aligned}$$

Wegen $$|a| - |a-b| > 0 \;\Rightarrow\; sgn\ a = sgn\ b \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

folgt

$$sgn\ Im(D(E)) = sgn\ Im(E) \cdot sgn\ ((\partial D)(ReE)) \qquad (E \in E_n(R_{\epsilon,\delta})).$$

Mit Differentiation von (6.2) und Satz 5.2 g) folgt

$$sgn\ Im(D(E)) = (-1)^n\ sgn\ Im(E) \qquad (E \in E_n(R_{\epsilon,\delta})).$$

Wenn man berücksichtigt, daß nach [M, I.9.41] gilt

$$sgn\ Im(g^{-1}(z)) = sgn\ Imz \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

dann folgt

[16] siehe [R, Theorem 10.25]

$$sgn\ Im(k(E)) = sgn\ Im(g^{-1} \circ \tfrac{1}{2}D)(E) = sgn\ Im(D(E))$$

$$= (-1)^n\ sgn\ Im(E) \qquad (E \in E_n(R_{\epsilon,\delta})). \qquad (6.5)$$

Seien $E \in R_{\epsilon,\tilde{\delta}}$ und $k := k(E)$. Dann ist E Eigenwert von $H_0(k)$ und nach Satz 5.2 c) ist auch $\overline{E} \in R_{\epsilon,\tilde{\delta}}$ Eigenwert von $H_0(\overline{k})$, d.h. es gilt $\overline{k} = k(\overline{E})$. Damit folgt $\overline{k(E)} = k(\overline{E})$. Mit $U := \bigcup_{\epsilon \in (0,\frac{\pi}{2})} R_{\epsilon,\tilde{\delta}}$ erfüllt also k die Punkte a(i) und a(ii).

Definiere nun für $n \in \mathbb{N}$, $E \in E_n(U)$, $x \in \mathbb{R}$ und $l \in \mathbb{Z}$ mit $l - x \in [0,1)$, die Funktionen

$$\tilde{u}_+(x,E) := \begin{cases} e^{ik(E)l} u_n(x-l, k(E)) & \text{für } n \text{ gerade} \\ e^{i(2\pi - k(E))l} u_n(x-l, 2\pi - k(E)) & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

und $$\tilde{u}_-(x,E) := \begin{cases} e^{i(2\pi - k(E))l} u_n(x-l, 2\pi - k(E)) & \text{für } n \text{ gerade} \\ e^{ik(E)l} u_n(x-l, k(E)) & \text{für } n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

so daß sich für jedes $m \in \mathbb{Z}$ ergeben:

$$\tilde{u}_\pm(x+m, E) = e^{ik(E)m} \tilde{u}_\pm(x,E). \qquad (6.6)$$

O.b.d.A. seien $n \in \mathbb{N}$ gerade und $E \in E_n(U)$. Das Argument E wird nicht immer mitgeschrieben. Dann sind zunächst für jedes $l \in \mathbb{Z}$ die Funktionen $\tilde{u}_\pm$ und $\tilde{u}'_\pm$ nur in $AC((l,l+1))$ aber mit

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \tilde{u}_+(l+\epsilon) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} u_n(\epsilon) e^{ik(E)l} = u_n(0) e^{ik(E)l} = \tilde{u}_+(0),$$

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \tilde{u}_+(l-\epsilon) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} u_n(1-\epsilon) e^{ik(E)(l-1)} = u_n(1) e^{ik(E)(l-1)}$$

$$= e^{ik(E)} u_n(0) e^{ik(E)(l-1)} = \tilde{u}_+(0)$$

sowie den analogen Gleichungen für $\tilde{u}_-$ und $\tilde{u}'_\pm$ sind $\tilde{u}_\pm$ und $\tilde{u}'_\pm$ in $AC(\mathbb{R})$.
Seien $x \in \mathbb{R}$ und $l \in \mathbb{Z}$ mit $l - x \in [0,1)$. Wegen der Periodizität von V gilt dann fast überall

$$(-\Delta + V(x) - E)\tilde{u}_+(x,E) = (-\Delta + V(x-l) - E) e^{ik(E)l} u_n(x-l, k(E)) = 0,$$

d.h. $\tilde{u}_+$ und analog $\tilde{u}_-$ lösen die DGL (6.1). Mit Satz 5.2 b) und a(ii) gilt

$$\overline{\tilde{u}_+(x,E)} = \overline{e^{ik(E)l}u_n(x-l,k(E))} = e^{-i\overline{k(E)}l}u_n(x-l,2\pi-\overline{k(E)})$$

$$= e^{i(2\pi-k(\overline{E}))l}u_n(x-l,2\pi-k(\overline{E})) = \tilde{u}_-(x,\overline{E}) \tag{6.7}$$

Ab jetzt können die Fälle für gerades und ungerades n wieder gemeinsam betrachtet werden. Seien also $n \in \mathbb{N}$ und $E \in E_n(U)$.
Man überzeugt sich von der linearen Unabhängigkeit von $\{\tilde{u}_-,\tilde{u}_+\}$ wie im Beweis von Satz 5.2 e) durch Vergleich der Funktionswerte bei 0 und 1 unter Berücksichtigung der unterschiedlichen Randbedingungen.
Als Lösungen der DGL (5.1) erfüllen die Restriktionen von $\tilde{u}_\pm$ auf $[0,1]$ die Gleichung (5.0):

$$\tilde{u}_\pm(x,E) = \tilde{u}_\pm(0,E)f_+(x,E) + \tilde{u}'_\pm(0,E)f_-(x,E) \qquad (x \in [0,1]). \tag{6.8}$$

Dabei gelten $\tilde{u}_-(0,E) \neq 0$ und $\tilde{u}_+(0,E) \neq 0$. Denn wäre z.B. $\tilde{u}_+(0,E) = 0$, dann löste $\tilde{u}_+(\,\cdot\,,E)$ das Dirichletproblem, und nach Lemma 6.1 wäre $E \in \mathbb{R}$. Mit (6.7) folgt dann auch $\tilde{u}_-(0,E) = 0$. Nach (6.8) wären damit $\tilde{u}_+$ und $\tilde{u}_-$ linear abhängig, was aber oben widerlegt wurde.

Für
$$v_\pm(x,E) := \frac{\tilde{u}_\pm(x,E)}{\tilde{u}_\pm(0,E)}$$

liefern (6.8) und die Randbedingungen

$$e^{\pm ik(E)} = v_\pm(1,E) = f_+(1,E) + v'_\pm(0,E)f_-(1,E) \tag{6.9}$$

mit $f_-(1) \neq 0$; denn sonst würde aus (6.8) und (6.9) folgen

$$e^{ik(E)} = v_+(1) = f_+(1) = v_-(1) = e^{-ik(E)},$$

und dies widerspricht $k(E) \in U$.
Damit kann man aber (6.9) nach $v'_\pm(0,E)$ auflösen, und mit a(i) und Lemma 4.6 c) sind $v'_\pm(0,\,\cdot\,)$ in $E_n(U)$ reellanalytisch. Mit (6.8) ist dann für jedes $x \in [0,1]$ die Funktion $v_\pm(x,\,\cdot\,)$ in $E_n(U)$ reellanalytisch.
Zur Definition von $u_\pm$ verwendet man die Quadratwurzel mit Schnitt auf der negativen reellen Halbachse (in Polarkoordinaten):

$$\sqrt{re^{i\varphi}} := \sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}} \qquad (\varphi \in (-\pi, \pi], r \in [0, \infty)).$$

Damit erfüllen[17]

$$u_{\pm}(x,E) := \frac{v_{\pm}(x,E)}{\sqrt{iW(v_{-},v_{+})(E)}}$$

die Gleichungen

$$W(u_{-},u_{+})(E) = \frac{1}{i}$$

und $$\overline{u_{\pm}(x,E)} = \frac{\overline{v_{\pm}(x,E)}}{\overline{\sqrt{iW(v_{-},v_{+})(E)}}} = \frac{v_{\mp}(x,\overline{E})}{\sqrt{iW(v_{-},v_{+})(\overline{E})}} = u_{\mp}(x,\overline{E}) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

wobei (6.7) verwendet wurde; b) und c) sind also gezeigt.
Mit (6.8) ist

$$u_{\pm}(x,E) = \frac{1}{\sqrt{iW(v_{-},v_{+})(E)}} f_{+}(x,E) + \frac{v'_{\pm}(0,E)}{\sqrt{iW(v_{-},v_{+})(E)}} f_{-}(x,E) \quad (x \in [0,1]). \qquad (6.10)$$

Sei $$p_{\pm}(x,E) := e^{\pm(-1)^{n} ik(E)x} u_{\pm}(x,E) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Dann sind $p_{\pm}$ und $p'_{\pm}$ absolutstetig und mit (6.6) ist für jedes $l \in \mathbb{Z}$:

$$p_{\pm}(x+l,E) = p_{\pm}(x,E) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

d.h. a(iii) gilt. Ferner gelten mit (6.7) und a(ii)

$$\overline{p_{\pm}(x,E)} = e^{\mp(-1)^{n}(-i)k(\overline{E})x} u_{\mp}(x,\overline{E}) = p_{\mp}(x,\overline{E}) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Mit (6.10) folgen (iv) und (vi) aus den entsprechenden Eigenschaften der $f_{\pm}$ (Lemma 4.6), der Regularität von $v_{\pm}$ und der Periodizität von $p_{\pm}$; damit ist 1) gezeigt.

---

[17]Für eine lineare DGL zweiter Ordnung der Form

$$u''(x) + a(x)u(x) = b(x) \qquad (x \in I)$$

mit einem geeigneten Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und geeigneten $a, b \in L^1(I)$ ist die Wronskideterminante zweier Lösungen immer unabhängig von x.

Nach 1a) gilt

$$\left|u_{\pm}(x,E)\right| \leq e^{\mp(-1)^n Im(k(E))x} \left\| p_{\pm}(\cdot,E)\right\|_{\infty}$$

und, da nach a(i) gilt

$$(-1)^n \; sgn \; Im(k(E)) = \; sgn \; Im(E)$$

folgt 2).
Nach 1(iii) und (iv) sind $p_{\pm}$ stetig differenzierbar insbesondere also stetig, so daß 3) wegen der offensichtlichen Stetigkeit von

$$\langle x,E\rangle \mapsto e^{\pm(-1)^n ik(E)x} \qquad (\langle x,E\rangle \in \mathbb{R}\times E_n(U))$$

folgt. □

Bemerkung :

Interessant ist die Frage, inwieweit das Fundamentalsystem durch 1) eindeutig charakterisiert ist. Man kann sich dazu überlegen, daß gilt:
Seien $\{u_{+}(\cdot,E), u_{-}(\cdot,E)\}$ und $\{\tilde{u}_{+}(\cdot,E), \tilde{u}_{-}(\cdot,E)\}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $E \in E_n(U)$ Fundamentalsysteme von (6.1) mit allen Eigenschaften von 1). Dann gibt es eine Funktion $s: \mathbb{R}\times E_n(U) \to \mathbb{C}$ mit den Eigenschaften:
- Für alle $E \in E_n(U)$ ist $s(\cdot,E)$ 1-periodisch,
- für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $E \in E_n(U)$ gilt $|\,s(x,E)\,| = 1$,
- für festes $x \in \mathbb{R}$ ist $s(x,\cdot)$ analytisch in $E_n(U)$
- und es gelten

$$\tilde{u}_{-}(x,E) = s(x,E)u_{-}(x,E) \qquad (x \in \mathbb{R}, E \in E_n(U))$$

$$\tilde{u}_{+}(x,E) = \frac{1}{s(x,E)}\, u_{+}(x,E) \qquad (x \in \mathbb{R}, E \in E_n(U)).$$

Da sich das asymptotische Verhalten der $u_{\pm}$ beim Übergang von der oberen komplexen Halbebene auf die untere gerade umkehrt, muß man bei der Konstruktion der Eigenlösungen von H über VIGLen die beiden Fälle getrennt betrachten (1) bzw 2) des folgenden Satzes), und die Eigenlösungen erhalten zusätzlich einen oberen Index.

Satz 6.3 :
Sei $n \in \mathbb{N}$.
1) Für $E \in E_n^{\gtreqless}(U)$ hat die DGL

$$(-\Delta + V(x) + Q(x) - E)u(x) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}) \tag{6.12}$$

genau zwei Lösungen $\varphi_-^{\gtreqless}(x,E)$ und $\varphi_+^{\gtreqless}(x,E)$ mit folgenden Eigenschaften :
a) Seien

$$K_-^{\gtreqless}(x,y,E) := \begin{cases} i(u_+(y,E)u_-(x,E) - u_-(y,E)u_+(x,E)) & \text{für } y \le x \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (x,y \in \mathbb{R})$$

und

$$K_+^{\gtreqless}(x,y,E) := \begin{cases} 0 & \text{sonst} \\ i(u_-(y,E)u_+(x,E) - u_+(y,E)u_-(x,E)) & \text{für } y \ge x \end{cases} \qquad (x,y \in \mathbb{R}).$$

Dann sind $\varphi_\pm^{\gtreqless}(x,E)$ die Lösungen der VIGLen

$$\varphi(x,E) = u_\pm(x,E) - \int_{\mathbb{R}} K_\pm^{\gtreqless}(x,y,E)Q(y)\varphi(y,E)dy \qquad (x \in \mathbb{R}). \tag{6.13}$$

b) Es gelten

$$\varphi_\pm^{\gtreqless}(x,E) = u_\pm(x,E) + e^{\mp|Im(k(E))|x}o(1) \qquad (x \to \pm\infty) \quad \text{und}$$

$$D_1\varphi_\pm^{\gtreqless}(x,E) = D_1u_\pm(x,E) + e^{\mp|Im(k(E))|x}\, o(1) \qquad (x \to \pm\infty),$$

wobei die $o(1)$-Funktionen beschränkt sind und in $E_n^{\gtreqless}(U)$ lokal uniform gewählt werden können.
D.h. es gibt Funktionen $r_\pm^{\gtreqless}(\cdot,E)$, $\tilde{r}_\pm^{\gtreqless}(\cdot,E): \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\quad \varphi_\pm^{\gtreqless}(x,E) = u_\pm(x,E) + e^{\mp|Im(k(E))|x}\, r_\pm^{\gtreqless}(x,E) \qquad (x \in \mathbb{R})$ bzw.

$$D_1\varphi_\pm^{\gtreqless}(x,E) = D_1u_\pm(x,E) + e^{\mp|Im(k(E))|x}\, \tilde{r}_\pm^{\gtreqless}(x,E) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

(ii) Für jedes $K \subset\subset E_n^{\gtreqless}(U)$ gibt es beschränkte Funktionen

$s^{\geq}_{\pm,K}, \tilde{s}^{\geq}_{\pm,K}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, für die gelten

$$s^{\geq}_{\pm,K} \geq |r^{\geq}_{\pm}(\cdot,E)| \qquad (E \in K) \text{ bzw.}$$

$$\tilde{s}^{\geq}_{\pm,K} \geq |\tilde{r}^{\geq}_{\pm}(\cdot,E)| \qquad (E \in K) \text{ und}$$

$$s^{\geq}_{\pm,K}, \tilde{s}^{\geq}_{\pm,K} \in o(1) \qquad (x \to \pm\infty).$$

c) Für festes $x \in \mathbb{R}$ sind $\varphi^{\geq}_{\pm}(x,\cdot)$ und $D_1\varphi^{\geq}_{\pm}(x,\cdot)$ analytisch in $E^{>}_n(U)$ und stetig in $E^{\geq}_n(U)$.

Es gelten weiterhin :

d) Die VIGLen in a) haben jeweils eine eindeutige Lösung, d.h. $\varphi^{\geq}_{-}(\cdot,E)$ und $\varphi^{\geq}_{+}(\cdot,E)$ sind durch a) eindeutig festgelegt,

e) und $\{\varphi^{\geq}_{-}(\cdot,E), \varphi^{\geq}_{+}(\cdot,E)\}$ sind ein Fundamentalsystem der DGL (6.12).

2) Für $E \in E^{\leq}_n(U)$ gelten die zu 1) analogen Aussagen, wobei die Integralkerne definiert werden müssen durch

$$K^{\leq}_{-}(x,y,E) := \begin{cases} 0 & \text{sonst} \\ i(u_-(y,E)u_+(x,E) - u_+(y,E)u_-(x,E)) & \text{für } y \geq x \end{cases} \qquad (x,y \in \mathbb{R})$$

und

$$K^{\leq}_{+}(x,y,E) := \begin{cases} i(u_+(y,E)u_-(x,E) - u_-(y,E)u_+(x,E)) & \text{für } y \leq x \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (x,y \in \mathbb{R})$$

und in b) die Enden der reellen Achse ihre Rollen vertauschen:

Es gelten

$$\varphi^{\leq}_{\pm}(x,E) = u_{\pm}(x,E) + e^{\pm|Im(k(E))|x} o(1) \qquad (x \to \mp\infty) \quad \text{und}$$

$$D_1\varphi^{\leq}_{\pm}(x,E) = D_1 u_{\pm}(x,E) + e^{\pm|Im(k(E))|x}\, o(1) \qquad (x \to \mp\infty),$$

wobei die $o(1)$-Funktionen beschränkt sind und in $E^{\leq}_n(U)$ lokal uniform gewählt werden können.

D.h. es gibt Funktionen $r^{\leq}_{\pm}(\cdot,E), \tilde{r}^{\leq}_{\pm}(\cdot,E): \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $$\varphi^{\leq}_{\pm}(x,E) = u_{\pm}(x,E) + e^{\pm|Im(k(E))|x}\, r^{\leq}_{\pm}(x,E) \qquad (x \in \mathbb{R}) \quad \text{bzw.}$$

$$D_1\varphi^{\leq}_{\pm}(x,E) = D_1 u_{\pm}(x,E) + e^{\pm|Im(k(E))|x}\,\tilde r^{\leq}_{\pm}(x,E) \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

(ii) Für jedes $K\subset\subset E_n^{\leq}(U)$ gibt es beschränkte Funktionen $s^{\leq}_{\pm,K}$, $\tilde s^{\leq}_{\pm,K}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$, für die gelten

$$s^{\leq}_{\pm,K} \geq |r^{\leq}_{\pm}(\cdot,E)| \qquad (E\in K) \text{ bzw.}$$

$$\tilde s^{\leq}_{\pm,K} \geq |\tilde r^{\leq}_{\pm}(\cdot,E)| \qquad (E\in K) \text{ und}$$

$$s^{\leq}_{\pm,K}, \tilde s^{\leq}_{\pm,K} \in o(1) \qquad (x\to\mp\infty).$$

3) Für $E\in E_n^{\geq}(U)$ gilt

$$\overline{\varphi^{\geq}_{\pm}(x,E)} = \varphi^{\leq}_{\mp}(x,\overline{E}) \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

4) Für $E\in E_n^{=}(U)$ gilt

a) $$W(\varphi^{\geq}_{-},\varphi^{\leq}_{+})(E) = \tfrac{1}{i}$$

und $$W(\varphi^{\leq}_{-},\varphi^{\geq}_{+})(E) = \tfrac{1}{i}\,.$$

b) Mit $$-\overline{c_{11}(E)} := c_{22}(E) := i\,W(\varphi^{\geq}_{+},\varphi^{\leq}_{+})(E)$$

sowie $$c_{12}(E) := c_{21}(E) := i\,W(\varphi^{\geq}_{-},\varphi^{\geq}_{+})(E)$$

sind $$\varphi^{\geq}_{-}(x,E) = c_{11}(E)\varphi^{\geq}_{+}(x,E) + c_{12}\varphi^{\leq}_{-}(x,E) \qquad (x\in\mathbb{R}) \tag{6.14}$$

und $$\varphi^{\geq}_{+}(x,E) = c_{21}(E)\varphi^{\leq}_{+}(x,E) + c_{22}\varphi^{\geq}_{-}(x,E) \qquad (x\in\mathbb{R}). \tag{6.15}$$

Beweis :
Zunächst eine Bemerkung zur Struktur des Beweises. 2) wird wegen der Analogie zu 1) nicht bewiesen und im Beweis von 1) wird nur $\varphi^{\geq}_{-}$ betrachtet. Es werden nicht alle Punkte nacheinander abgearbeitet, sondern die Reihenfolge ist 1a), 1b), 1c), 4a), 4b), 1d) 3) und zuletzt 1e).
1a bis 1c) O.b.d.A. sei $n\in\mathbb{N}$ und gerade. Sei $E\in E_n^{\geq}(U)$, d.h. nach Satz 6.2 a(i) ist $Im(k(E))\geq 0$. Es wird zunächst eine Lösung $f(\cdot,E)$ der VIGL

$$\varphi(x,E) = u_-(x,E) - \int_{\mathbb{R}} K^{\geq}_{-}(x,y,E)Q(y)\varphi(y,E)dy \qquad (x \in \mathbb{R}) \qquad (6.13)$$

konstruiert, und zwar iterativ. Man benötigt dazu Abschätzungen für $K^{\geq}_{-}$ und $D_1K^{\geq}_{-}$: Es gelten nach Satz 6.2 1) für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $y < x$

$$\begin{aligned} \left|K^{\geq}_{-}(x,y,E)\right| &= \left|u_+(y,E)u_-(x,E) - u_+(x,E)u_-(y,E)\right| \\ &\leq \left\|p_+(\cdot,E)\right\|_\infty \left\|p_-(\cdot,E)\right\|_\infty \left|e^{ik(E)(y-x)} + e^{ik(E)(x-y)}\right| \\ &\leq \left\|p_+(\cdot,E)\right\|_\infty \left\|p_-(\cdot,E)\right\|_\infty \left(e^{Im(k(E))(x-y)} + e^{Im(k(E))(y-x)}\right) \\ &\leq c(E)\, e^{Im(k(E))(x-y)} \end{aligned} \qquad (6.16)$$

mit $c(E) := 2\left\|p_+(\cdot,E)\right\|_\infty \left\|p_-(\cdot,E)\right\|_\infty > 0$, sowie

$$\begin{aligned} \left|D_1K^{\geq}_{-}(x,y,E)\right| &= \left|u_+(y,E)D_1u_-(x,E) - D_1u_+(x,E)u_-(y,E)\right| \\ &\leq \left|p_+(y,E)(-ik(E)p_-(x,E) + D_1p_-(x,E))e^{ik(E)(y-x)}\right| \\ &\leq \left|p_-(y,E)(+ik(E)p_+(x,E) + D_1p_+(x,E))e^{ik(E)(x-y)}\right| \\ &\leq \tilde{c}(E)\, e^{Im(k(E))(x-y)} \end{aligned} \qquad (6.17)$$

mit

$\tilde{c}(E) := c(E) + 2\, max\left\{\left\|p_+(\cdot,E)\right\|_\infty \left\|D_1p_-(\cdot,E)\right\|_\infty, \left\|p_-(\cdot,E)\right\|_\infty \left\|D_1p_+(\cdot,E)\right\|_\infty\right\}$,

wobei nach Satz 6.2 1) c und $\tilde{c}$ lokal in $E_n^{\geq}(U)$ beschränkt sind. Wegen $Q \in L^1(\mathbb{R})$ ist

$$P(x,E) := c(E)\int_{-\infty}^{x} |\,Q(y)\,|\,dy \qquad (6.18)$$

wohldefiniert und monoton. Nach dem Hauptsatz der Lebesguetheorie ist $P(\cdot,E) \in AC_{loc}(\mathbb{R})$, und es gelten

$$D_1P(x,E) = c(E)\,|\,Q(x)\,| \qquad (x \in \mathbb{R}), \qquad (6.19)$$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to -\infty} P(x,E) = 0 \\ \text{und} \qquad &\lim_{x \to +\infty} P(x,E) = c(E) \, \|Q\|_1 \end{aligned}\right\} \qquad (6.20)$$

Nun kann man die entscheidende Ungleichung für die Iteration formulieren:
Behauptung :

Es ist

$$f_0(\,\cdot\,,E) := u_-(\,\cdot\,,E)$$

$$f_{l+1}(x,E) := \int_{\mathbb{R}} K^{\geq}_{-}(\,\cdot\,,y,E)\; Q(y) f_l(y,E) \qquad (l \in \mathbb{N}_0) \qquad (6.21)$$

eine Folge wohldefinierter Funktionen, für die gilt

$$\left|f_l(x,E)\right| \leq \left\|p_-(\,\cdot\,,E)\right\|_\infty \, e^{Im(k(E))x} \, \tfrac{1}{l!} P(x,E)^l \qquad (l \in \mathbb{N}_0,\ x \in \mathbb{R}). \qquad (6.22)$$

Der Beweis

erfolgt mit vollständiger Induktion. Es wird das Argument E nicht mitgeführt.

I Es gilt

$$\left|f_0(x)\right| = \left|u_-(x)\right| \leq \|p_-\|_\infty e^{Im(k(E))x} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

II Sei $l \in \mathbb{N}_0$ und gelte

$$\left|f_l(x)\right| \leq \|p_-\|_\infty \, e^{Im(k(E))x} \, \tfrac{1}{l!} \, P(x)^l \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Dann folgt zusammen mit (6.16) und (6.19,20)

$$\begin{aligned} \left|f_{l+1}(x)\right| &\leq \int_{\mathbb{R}} \left|K^{\geq}_{-}(x,y)\right| \left|Q(y)\right| \left|f_l(x)\right| dy \\ &\leq \int_{-\infty}^{x} c(E) e^{Im(k(E))(x-y)} \left|Q(y)\right| \|p_-\|_\infty e^{Im(k(E))y} \, \tfrac{1}{l!} \, P(y)^l \, dy \\ &\leq \|p_-\|_\infty e^{Im(k(E))x} \int_{-\infty}^{x} P'(y) \, \tfrac{1}{l!} \, P(y)^l \, dy \end{aligned}$$

$$= \| p_- \|_\infty e^{Im(k(E))x} \int_{-\infty}^{x} \Big(\tfrac{1}{(l+1)!} P^{l+1} \Big)'(y) \, dy$$

$$= \| p_- \|_\infty e^{Im(k(E))x} \tfrac{1}{(l+1)!} P(x)^{l+1} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Wegen der Monotonie der Majoranten als Funktion von x ist die Reihe $\sum_{l \in \mathbb{N}_0} f_l(\cdot, E)$ nicht nur punktweise sondern sogar für jedes $x \in \mathbb{R}$ in $(-\infty, x]$ absolut gleichmäßig konvergent. Die Grenzfunktion heiße $f(\cdot, E)$. Man hat also für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{c} |f_l(y,E)| \\ \sum\limits_{l \le m} |f_l(y,E)| \\ |f\ (y,E)| \end{array}\right\} \le \| p_-(\cdot, E) \|_\infty e^{Im(k(E))y} e^{P(y,E)}$$

$$\le \| p_-(\cdot, E) \|_\infty e^{Im(k(E))x} e^{P(x,E)} \qquad (l, m \in \mathbb{N}_0,\ y < x). \qquad (6.23)$$

Nach Satz 6.2 1) sind c, k und $E \mapsto \| p_-(\cdot, E) \|_\infty$ in $E_n^{\ge}(U)$ lokal beschränkt, d.h. aus (6.22) folgt auch die lokal gleichmäßige Konvergenz von $\sum_{l \in \mathbb{N}_0} f_l(x, \cdot)$ in $E_n^{\ge}(U)$.

Aus (6.23) folgen mit (6.16) und (6.19,20)

$$\left.\begin{array}{c} \left| K_-^{\ge}(x,y,E) Q(y) f_l(y,E) \right| \\ \left| K_-^{\ge}(x,y,E) Q(y) \sum\limits_{l \le m} |f_l(y,E)| \right| \\ \left| K_-^{\ge}(x,y,E) Q(y) f\ (y,E) \right| \end{array}\right\} \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{x} c(E) e^{Im(k(E))(x-y)} |Q(y)| \, \| p_-(\cdot, E) \|_\infty e^{Im(k(E))y} e^{P(y,E)} dy$$

$$\le \| p_-(\cdot, E) \|_\infty e^{Im(k(E))x} \int_{-\infty}^{x} (e^{P(\cdot, E)})'(y) dy$$

$$= \| p_-(\cdot,E)\|_\infty e^{Im(k(E))x}\left(e^{P(x,E)}-1\right) \qquad (x\in\mathbb{R},\, l,m\in\mathbb{N}_0) \qquad (6.24)$$

und analog mit (6.17) und (6.19,20) :

$$\int_{\mathbb{R}} \left| D_1 K^{\geq}_{-}(x,y,E)Q(y)f(y,E)\right| \leq \int_{-\infty}^{x} \tilde{c}(E)e^{Im(k(E))(x-y)}\left|Q(y)\right| \| p_-(\cdot,E)\|_\infty e^{Im(k(E))y}$$
$$= \frac{\tilde{c}(E)}{c(E)} \| p_-(\cdot,E)\|_\infty e^{Im(k(E))x}(e^{P(x,E)}-1) \qquad (x\in\mathbb{R}); \qquad (6.25)$$

es galt $c(E)>0$.
Mit dem Satz über majorisierte Konvergenz gilt

$$f(x,E) = \lim_{m\to\infty}\sum_{l\leq m} f_l(x,E) = u_-(x,E) - \lim_{m\to\infty}\int_{-\infty}^{x} K^{\geq}_{-}(x,y,E)Q(y)\sum_{l\leq m-1} f_l(y,E)dy$$
$$= u_-(x,E) - \int_{-\infty}^{x} K^{\geq}_{-}(x,y,E)Q(y)f\,(y,E)dy \qquad (x\in\mathbb{R}) \qquad (6.26)$$

mit $L^1(\mathbb{R})$-Majorante gemäß (6.24), d.h. $f(\cdot,E)$ löst (6.13).
Aus (6.26) folgt mit (6.24) und (6.19)

$$\left|f(x,E)-u_-(x,E)\right| = e^{Im(k(E))x}\| p_-(\cdot,E)\|_\infty (e^{c(E)\int_{-\infty}^{x}|Q(y)|}-1) \qquad (x\in\mathbb{R}),$$

so daß wegen $Im(k(E))\geq 0$ die Funktion

$$r^{\geq}_{-}(\cdot,E) := \frac{f(\cdot,E)-u_-(\cdot,E)}{e^{Im(k(E))(\cdot)}}$$

die in b) geforderten Eigenschaften hat, wobei die Uniformitätsaussage aus der lokalen Beschränktheit von c und $E\mapsto\| p_-(\cdot,E)\|_\infty$ in $E_n^{\geq}(U)$ folgt.
Jetzt soll die VIGL (6.26) differenziert werden. Wegen

$$\int_{-\infty}^{x} K^{\geq}_{-}(x,y,E)Q(y)f(y,E)dy = i(u_-(x,E)\int_{-\infty}^{x} u_+(y,E)Q(y)f(y,E)dy$$
$$- u_+(x,E)\int_{-\infty}^{x} u_-(y,E)Q(y)f(y,E)dy) \qquad (x\in\mathbb{R})$$

liefert der Hauptsatz, daß durch die VIGL (6.26) f aus Summen und Produkten von lokal absolutstetigen Funktionen dargestellt ist. Differentiation ist also möglich und liefert, da für jedes $x\in\mathbb{R}$ gilt $K^{\geq}_{-}(x,x,E)=0$, die Gleichung

$$D_1 f\,(x,E) = D_1 u_-(x,E) - \int_{-\infty}^{x} K_{\overline{\ }}^{\geq}(x,y,E) Q(y) f\,(y,E) dy \qquad (x \in \mathbb{R}). \qquad (6.27)$$

Analog wie oben sieht man ein, daß $f' \in AC_{loc}(\mathbb{R})$ ist. Nochmalige Differentiation unter Berücksichtigung von

$$D_1 K_{\overline{\ }}^{\geq}(x,x,E) = -W(u_-, u_+)(E) = -\tfrac{1}{i} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

beweist, daß $f(\,\cdot\,,E)$ die DGL (6.12) erfüllt.
Um die in b) geforderten Eigenschaften von $D_1 f$ zu zeigen, argumentiert man mit (6.27) und (6.25) wie oben bei den Abschätzungen von f.
Für die Regularitätsaussagen in c) sei nun $x \in \mathbb{R}$. Da die Konvergenz von $\sum_{l \in \mathbb{N}_0} f_l(x,\,\cdot\,)$ lokal gleichmäßig in $E_n^{\geq}(U)$ ist, genügt es zu zeigen:
<u>Behauptung :</u>

Für alle $l \in \mathbb{N}_0$ ist f_l stetig (in $\mathbb{R} \times E_n^{\geq}(U)$) und $f_l(x,\,\cdot\,)$ in $E_n^{>}(U)$ analytisch.

Der <u>Beweis</u>
erfolgt mit vollständiger Induktion.

I Es erfüllt $f_0(x,\,\cdot\,) = u_-(x,E)$ die Behauptung nach Satz 6.2 1).

II Sei $l \in \mathbb{N}_0$ mit f_l stetig und $f_l(x,\,\cdot\,)$ analytisch in $E_n^{>}(U)$. Um auf (6.21) Lemma 4.7 anwenden zu können, muß der Integrand abgeschnitten werden. Seien dazu für alle $N \in \mathbb{N}$ (und jedes Element von Q)

$$Q^N(x) := \begin{cases} Q(x) & \text{für } |Q(x)| \leq N \text{ und } |x| \leq N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

und $$f_{l+1}^N(x,E) := \int_{\mathbb{R}} K_{\overline{\ }}^{\geq}(x,y,E) Q^N(y) f_l(y,E) dy$$

$$= iu_-(x,E) \int_{-N}^{x} u_+(y,E) Q^N(y) f_l(y,E) dy$$

$$- iu_+(x,E) \int_{-N}^{x} u_-(y,E) Q^N(y) f_l(y,E) dy \qquad (E \in E_n^{\geq}(U). \qquad (6.28)$$

Zunächst zur Konvergenz: Mit (6.16) und (6.22) ist

$$\left|f_{l+1}(x,E)-f_{l+1}^N(x,E)\right| \le \int\limits_{-\infty}^{x} \left|K_{-}^{\ge}(x,y,E)\right|\left|Q(y)-Q^N(y)\right|\left|f_l(x,E)\right| dy$$

$$\le c(E)e^{Im(k(E))x}\, e^{c(E)\int\limits_{-\infty}^{x}|Q(y)|} \int\limits_{-\infty}^{x} \left|Q-Q^N\right| \qquad (E\in E_n^{\ge}(U)),$$

woraus wegen der lokalen Beschränktheit von c, k und $E \mapsto \|p_-(\cdot,E)\|_\infty$ in $E_n^{\ge}(U)$ und $\|Q-Q^N\|_1 \to 0$ die lokal gleichmäßige Konvergenz folgt.

Für die Stetigkeit von f_{l+1}^N bleibt, da nach Satz 6.2 3) $u_\pm$ stetig sind, das Integral in (6.28) zu betrachten. Deren Stetigkeit folgt aus der lokal gleichmäßigen Stetigkeit von $u_\pm$ und f_l. Die Analytizität von f_{l+1}^N folgt also mit Lemma 4.7.

Anzumerken ist noch, daß die Integralkerne die Symmetriebeziehung

$$\overline{K_{\pm}^{\ge}(x,y,E)} = K_{\mp}^{\le}(x,y,\overline{E}) \qquad (x,y\in\mathbb{R}, E\in E_n^{\ge}(U)) \qquad (6.29)$$

erfüllen. Denn nach Satz 6.2 1c) gilt für alle $E\in E_n^{\ge}(U)$

$$\overline{K_{-}^{\ge}(x,y,E)} = -i(\overline{u_+(y,E)}\;\overline{u_-(x,E)} - \overline{u_-(y,E)}\;\overline{u_+(x,E)})$$

$$= -i(u_-(y,\overline{E})u_+(x,\overline{E}) - u_+(y,\overline{E})u_-(x,\overline{E})$$

$$= K_{+}^{\le}(x,y,\overline{E}) \qquad (x\in\mathbb{R}, y<x, E\in E_n^{\ge}(U))$$

und analog $\overline{K_{+}^{\ge}(x,y,E)} = K_{-}^{\le}(x,y,\overline{E})$.

4) Seien $n\in\mathbb{N}$ und $E\in E_n^{=}(U)$. Das Argument E wird nicht mitgeführt.

a) Nach 1b), 2b) gilt

$$W(\varphi_{-}^{\ge},\varphi_{+}^{\le}) = (u_-(x)+o(1))\,(u'_+(x)+o(1))$$

$$-(u'_-(x)+o(1))\,(u_+(x)+o(1)) \quad (x\to-\infty).$$

Wegen der Beschränktheit von $u_\pm$ und $u'_\pm$ (Satz 6.2 1a)) liefert der Grenzübergang

$$W(\varphi_{-}^{\ge},\varphi_{+}^{\le}) = W(u_-,u_+)(E) = \tfrac{1}{i}.$$

Analog sieht man ein, daß gilt

$$W(\varphi_-^{\leq}, \varphi_+^{\geq}) = \tfrac{1}{i}.$$

b) Die Existenz und Eindeutigkeit der Konstanten c_{ij} gilt, da nach a) $\{\varphi_-^{\geq}, \varphi_+^{\leq}\}$ sowie $\{\varphi_-^{\leq}, \varphi_+^{\geq}\}$ Fundamentalsysteme der selben DGL sind. Man bestimmt die Konstanten durch Bilden von Wronskideterminanten unter Beachtung von a). Z.B. ist mit (6.15)

$$W(\varphi_-^{\geq}, \varphi_+^{\geq}) = c_{21} W(\varphi_-^{\geq}, \varphi_+^{\leq}) = \frac{c_{21}}{i}.$$

1d) Sei $E \in E_n^{\geq}(U)$. Das Argument E wird nicht mitgeführt. Sei g eine weitere Lösung der VIGL (6.13). Dann ist g genau wie $\varphi_-^{\geq}$ Lösung der DGL (6.12) und, da nach 4a) $\{\varphi_-^{\geq}, \varphi_+^{\leq}\}$ Fundamentalsystem der DGL ist, gibt es $a, b \in \mathbb{C}$, so daß gilt

$$g = a\varphi_-^{\geq} + b\varphi_+^{\leq}$$

Zusammen mit den jeweiligen VIGLen und (6.29) folgt

$$\begin{aligned}
0 &= g - a\varphi_-^{\geq} - b\varphi_+^{\leq} = u_- - au_- - bu_+ - \\
&- \int_{\mathbb{R}} (K_-^{\geq}(\cdot, y)Q(y)g(y) - K_-^{\geq}(\cdot, y)Q(y)a\varphi_-^{\geq}(y) - K_+^{\leq}(\cdot, y)Q(y)b\varphi_+^{\leq}(y))dy \\
&= u_- - au_- - bu_+ - \int_{\mathbb{R}} K_-^{\geq}(\cdot, y)Q(y)(g(y) - a\varphi_-^{\geq}(y) - b\varphi_+^{\leq}(y))dy \\
&= u_- - au_- - bu_+.
\end{aligned}$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit von $\{u_-, u_+\}$ sind $b = 0$ und $a = 1$, d.h. es ist $g = \varphi_-^{\geq}$.

3) Sei $E \in E_n^{\geq}(U)$. Betrachtet man die zu (6.13) konjugiert komplexe Gleichung, erhält man mit (6.29)

$$\begin{aligned}
\overline{\varphi_{\pm}^{\geq}(x,E)} &= \overline{u_{\pm}(x,E)} - \int_{\mathbb{R}} \overline{K_{\pm}^{\geq}(x,y,E)} Q(y) \overline{\varphi_{\pm}^{\geq}(y,E)} dy \\
&= u_{\mp}(x,\overline{E}) - \int_{\mathbb{R}} K_{\mp}^{\leq}(x,y,\overline{E}) Q(y) \overline{\varphi_{\pm}^{\geq}(y,E)} dy \qquad (x \in \mathbb{R}),
\end{aligned}$$

so daß wegen der Eindeutigkeit der Lösung der VIGL folgt

$$\overline{\varphi_{\pm}^{\gtrless}(x,E)} = \varphi_{\mp}^{\lessgtr}(x,\overline{E}) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

1e) Die Fälle $E \in E_n^{\gtrless}(U)$ und $E \in E_n^{=}(U)$ werden getrennt diskutiert. Sei zunächst $E \in E_n^{>}(U)$. Wäre $\{\varphi_{-}^{\gtrless}(\cdot,E), \varphi_{+}^{\gtrless}(\cdot,E)\}$ linear abhängig, dann gäbe es ein $a \in \mathbb{C}$ mit $\varphi_{-}^{\gtrless}(\cdot,E) = a\varphi_{+}^{\gtrless}(\cdot,E)$ oder ein $b \in \mathbb{C}$ mit $\varphi_{+}^{\gtrless}(\cdot,E) = b\varphi_{-}^{\gtrless}(\cdot,E)$, dies hieße aber, daß $\varphi_{-}^{\gtrless}(\cdot,E) \in L^2(\mathbb{R})$ wäre oder $\varphi_{+}^{\gtrless}(\cdot,E) \in L^2(\mathbb{R})$ wäre und der selbstadjungierte Operator H den komplexen Eigenwert E hätte.
Sei nun $E \in E_n^{=}(U)$. Das Argument E wird nicht mitgeführt. Aus (6.15) folgt mit 3)

$$\varphi_{-}^{\leq} = \overline{c_{21}}\varphi_{-}^{\geq} + \overline{c_{22}}\varphi_{+}^{\leq}.$$

Durch Bilden der Wronskideterminante mit $\varphi_{+}^{\geq}$ erhält man unter Berücksichtigung von 4)

$$\frac{1}{i} = W(\varphi_{-}^{\leq},\varphi_{+}^{\geq}) = \overline{c_{21}}W(\varphi_{-}^{\geq},\varphi_{+}^{\geq}) + \overline{c_{22}}W(\varphi_{+}^{\leq},\varphi_{+}^{\geq}) = \frac{|c_{21}|^2}{i} - \frac{|c_{22}|^2}{i}.$$

Das heißt aber

$$\left|W(\varphi_{-}^{\geq},\varphi_{+}^{\geq})\right|^2 = |ic_{21}|^2 = 1 + |c_{22}|^2 > 0. \qquad \square$$

Bemerkung :
Da man schon zur Lösung der VIGLen nicht auf die Integrierbarkeit von Q verzichten kann, ist klar, daß mit der Wahl einer L^1-Störung die natürliche Grenze für diese Annäherung an das Streuproblem erreicht ist.

Satz 6.4 :
Sei $n \in \mathbb{N}$, und mit der Konvention

$$r_< := r_<(x,y) := min\ \{x,y\}$$
$$r_> := r_>(x,y) := max\ \{x,y\} \qquad (x,y \in \mathbb{R}) \text{ seien}$$

$$R_0^{\gtrless}(x,y,E) := -i(u_-(r_<,E)\ u_+(r_>,E)) \qquad (E \in E_n^{\gtrless}(U),\ x,y \in \mathbb{R}),$$

$$R_0^{\leq}(x,y,E) := i(u_+(r_<,E)\, u_-(r_>,E)) \qquad (E \in E_n^{\leq}(U),\ x,y \in \mathbb{R}).$$

$$R^{\geq}(x,y,E) := \frac{\varphi_-^{\geq}(r_<,E)\varphi_+^{\geq}(r_>,E)}{-W(\varphi_-^{\geq},\varphi_+^{\geq})(E)} \qquad (E \in E_n^{\geq}(U),\ x,y \in \mathbb{R}) \text{ und}$$

$$R^{\leq}(x,y,E) := \frac{\varphi_+^{\leq}(r_<,E)\varphi_-^{\leq}(r_>,E)}{W(\varphi_-^{\leq},\varphi_+^{\leq})(E)} \qquad (E \in E_n^{\leq}(U),\ x,y \in \mathbb{R}).$$

Dann gilt:

1) a) Es sind $R_0^{\geq}$, $R^{\geq}$ uniform in $E_n^{\geq}(U)$ beschränkt, d.h. zu jedem $K \subset\subset E_n^{\geq}(U)$ sind $R_0^{\geq}$ und $R^{\geq}$ in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times K$ beschränkt,

b) für feste $x,y \in \mathbb{R}$ sind $R_0^{\geq}(x,y,\cdot)$ und $R^{\geq}(x,y,\cdot)$ stetig in $E_n^{\geq}(U)$,

die analogen Aussagen für $R_0^{\leq}$ und $R^{\leq}$ und

c)

$$\overline{R_0^{\geq}(x,y,E)} = R_0^{\leq}(x,y,\overline{E}) \qquad (x,y \in \mathbb{R}, E \in E_n^{\geq}(U))$$

sowie
$$\overline{R^{\geq}(x,y,E)} = R^{\leq}(x,y,\overline{E}) \qquad (x,y \in \mathbb{R}, E \in E_n^{\geq}(U)).$$

2) Sei $E \in E_n^{\neq}(U)$. Dann gilt

a) Die Resolventen von H_0 bzw. H sind

$$R_0(E)\colon L^2(\mathbb{R}) \to D(H_0)$$

$$R_0(E)f := \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} R_0^{\geq}(\cdot,y,E)f(y)dy & (\text{falls } E \in E_n^{>}(U)) \\ \int_{\mathbb{R}} R_0^{\leq}(\cdot,y,E)f(y)dy & (\text{falls } E \in E_n^{<}(U)) \end{cases}$$

und

$$R(E)\colon L^2(\mathbb{R}) \to D(H)$$

$$R(E)f := \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} R^{\geq}(\cdot,y,E)f(y)dy & (\text{falls } E \in E_n^{>}(U)) \\ \int_{\mathbb{R}} R^{\leq}(\cdot,y,E)f(y)dy & (\text{falls } E \in E_n^{<}(U)) \end{cases}.$$

b) Für jeden Multiplikationsoperator $W \in L^2(\mathbb{R})$ sind die Operatoren $W \circ R_0(E)$ und $W \circ R(E)$ sowie ihre Adjungierten Hilbert-Schmidt.

c) Die Differenz $R_0(E) - R(E)$ ist in der Spurklasse.

3) Seien $E \in E_n^{=}(U)$ und $f \in L^1(\mathbb{R})$. Dann sind

$$\int_{\mathbb{R}} R_0^{\geq}(\cdot, y, E) f(y) dy, \int_{\mathbb{R}} R_0^{\leq}(\cdot, y, E) f(y) dy \in L^\infty(\mathbb{R})$$

und lösen die DGL

$$(-\Delta + V(x) - E) u(x) = f(x) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

und es sind

$$\int_{\mathbb{R}} R^{\geq}(\cdot, y, E) f(y) dy, \int_{\mathbb{R}} R^{\leq}(\cdot, y, E) f(y) dy \in L^\infty(\mathbb{R})$$

und lösen die DGL

$$(-\Delta + V(x) + Q(y) - E) u(x) = f(x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Beweis :

Es genügt, die Behauptungen für H zu zeigen, weil dann die entsprechenden Eigenschaften für H_0 als Spezialfall $Q = 0$ folgen.

1) Es ist mit Satz 6.3 1a),1b)

$$\left| R^{\geq}(x, y, E) \right| \leq \left| \frac{\varphi_-^{\geq}(r_<, E) \varphi_+^{\geq}(r_>, E)}{-W(\varphi_-^{\geq}, \varphi_+^{\geq})(E)} \right|$$

$$\leq \frac{1}{\left| W(\varphi_-^{\geq}, \varphi_+^{\geq})(E) \right|} \left| u_-(r_<, E) + e^{|Im(k(E))| r_<} r_-^{\geq}(r_<, E) \right|$$

$$\times \left| u_+(r_>, E) + e^{-|Im(k(E))| r_>} r_+^{\geq}(r_>, E) \right|$$

$$\leq e^{|Im(k(E))|(r_< - r_>)} \frac{1}{\left| W(\varphi_-^{\geq}, \varphi_+^{\geq})(E) \right|}$$

$$\times \left| p_-(r_<, E) + r_-^{\geq}(r_<, E) \right| \left| p_+(r_>, E) + r_+^{\geq}(r_>, E) \right|$$

$$\leq \; c(E)\, e^{|Im(k(E))|\,|x-y|} \qquad (x, y \in \mathbb{R},\; E \in E_n^{>}(U)) \tag{6.30}$$

mit $$c(E) := \frac{1}{\left|W(\varphi_-^{\geq}, \varphi_+^{\geq})(E)\right|}\left(\left\|p_-(\cdot, E)\right\|_\infty + \left\|r_-^{\geq}(\cdot, E)\right\|_\infty\right)$$
$$\times\left(\left\|p_+(\cdot, E)\right\|_\infty + \left\|r_+^{\geq}(\cdot, E)\right\|_\infty\right).$$

Damit folgt a) aus der lokalen Beschränktheit der Funktionen $k, (W(\varphi_-^{\geq}, \varphi_+^{\geq}))^{-1}$, $E \mapsto \left\|p_\pm(\cdot, E)\right\|_\infty$ und $E \mapsto \left\|r_\pm^{\geq}(\cdot, E)\right\|_\infty$ in $E_n^{\geq}(U)$.
b) folgt aus Satz 6.3 1c).
Die Aussagen für $R^{\leq}$ beweist man analog.
Für den Beweis von c) sei $E \in E_n^{\geq}(U)$. Dann gilt mit Satz 6.3 3):

$$\overline{R^{\geq}(x, y, E)} = \frac{\overline{\varphi_-^{\geq}(r_<, E)\varphi_+^{\geq}(r_>, E)}}{-W(\varphi_-^{\geq}, \varphi_+^{\geq})(E)} = \frac{\varphi_+^{\leq}(r_<, \overline{E})\varphi_-^{\leq}(r_>, \overline{E})}{W(\varphi_-^{\leq}, \varphi_+^{\leq})(\overline{E})}$$
$$= R^{\leq}(x, y, \overline{E}) \qquad (x, y \in \mathbb{R}).$$

2) Die Argumente für a) kann man z.B. bei [J\R] oder [H] nachlesen.
Seien nun $E \in E_n^{>}(U)$ und $W \in L^2(\mathbb{R})$. Mit (6.30) ist

$$\left|W(x)R^{\geq}(x, y, E)\right| \leq \left|W(x)\right| c(E) e^{-|Im(k(E))|\,|x-y|}$$

und damit in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ quadratintegrierbar, d.h. nach [R\S-I, Theorem VI-23] ist $W \circ R(E)$ Hilbert-Schmidt. Die Aussage für die Adjungierten folgt sofort, wenn man bedenkt, daß durch Vertauschen der Argumente und komplexe Konjugation der Kern eines beschränkten Integraloperators in den Kern seines Adjungierten übergeht. Oder man verwendet einen abstrakten Satz [R\S-I, Theorem VI.22 a)]. Für $E \in E_n^{<}(U)$ argumentiert man analog. Damit ist b) gezeigt.
Es gilt formal für nichtreelles E:

$$R_0(E) - R(E) = R(E)QR_0(E) \tag{6.31}$$

Da aber z.B. nicht notwendig $D(Q) \subset D(H_0) = Ran(R_0(E))$ gilt, ist nicht klar, in welchem Sinne obige Gleichung zu interpretieren ist. Eine Möglichkeit der Deutung besteht darin, den Raum[18] $\langle D(d), \|\ \|_h \rangle$ und dessen Dualraum $\langle D(d), \|\ \|_h \rangle^*$ zu betrachten. Man kann dann z.B. die relative Formbeschränktheit[19] von q bzgl. d lesen

[18] siehe Definition 3.1 f)

als Beschränktheit von

$$Q: \langle D(d), \| \ \|_h \rangle \to \langle D(d), \| \ \|_h \rangle^*.$$

Eine andere Möglichkeit besteht darin, Q zu zerlegen: Sei

$$Q(x)^{\frac{1}{2}} := |Q(x)|^{\frac{1}{2}} sgn\, Q(x) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

so daß gilt $Q^{\frac{1}{2}} |Q|^{\frac{1}{2}} = Q$. Dann sind $Q^{\frac{1}{2}}$ und $|Q|^{\frac{1}{2}}$ quadratintegrierbar und nach b) sind

$Q^{\frac{1}{2}} \circ R_0(E)$ und $(|Q|^{\frac{1}{2}} \circ R(\overline{E}))^*$ Hilbert-Schmidt. Man erhält formal die rechte Seite von (6.31) durch

$$(\,|Q|^{\frac{1}{2}} \circ R(\overline{E}))^* (Q^{\frac{1}{2}} \circ R_0(E)) = R(E)\, |Q|^{\frac{1}{2}}\, Q^{\frac{1}{2}} R_0(E)$$

Seien $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Dann gilt tatsächlich mit den Formen aus dem dritten Kapitel

$$(f, (\,|Q|^{\frac{1}{2}} \circ R(\overline{E}))^* (Q^{\frac{1}{2}} \circ R_0(E)) g) = q(R(\overline{E})f, R_0(E)g)$$

$$= \overline{h(R_0(E)g, R(\overline{E})f)} - h_0(R(\overline{E})f, R_0(E)g)$$

$$= \overline{(R_0(E)g, f) + (R_0(E)g, \overline{E} R(\overline{E})f)} - (R(\overline{E})f, g) - (R(\overline{E})f, E R_0(E)g)$$

$$= (f, (R_0(E) - R(E))g).$$

Es läßt sich also $R_0(E) - R(E)$ als Produkt zweier Hilbert-Schmidt-Operatoren darstellen, und ist deshalb nach [R\S-I, Theorem VI.22 h)] in der Spurklasse.

3) Die Beschränktheit folgt aus 1a); z.B. gilt :

$$\left| \int_{\mathbb{R}} R^{\geq}(x, y, E) f(y)\, dy \right| \leq \| R^{\geq}(\cdot, \cdot, E) \|_{\infty} \| f \|_1 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Den Rest rechnet man direkt nach, wobei sich die Differenzierbarkeit jeweils aus dem Hauptsatz der Lebesguetheorie ergibt.

[19] siehe Lemma 3.3

7. Eigenfunktionsentwicklung

Die zeitunabhängige Streutheorie nutzt als Ausgangspunkt die sogenannten Lippmann-Schwinger-Gleichungen (im folgenden LSGLen), die man durch formales Anwenden der Wellenoperatoren auf die Eigenlösungen ableitet:[20]

$$\psi = u_\pm - \lim_{\epsilon \downarrow 0} R_0(E + i\epsilon)(Q\psi)$$

$$\psi = u_\pm - \lim_{\epsilon \downarrow 0} R_0(E - i\epsilon)(Q\psi),$$

wobei E im absolutstetigen Spektrum von H_0 liegt. Es bleibt die Frage, in welchem Sinn die Grenzwerte zu interpretieren sind. Im vorliegenden Fall nutzt man die gute Kontrolle über die Greensfunktion (Satz 6.4) und erhält die Gleichungen (7.1).
Mit deren Lösungen läßt sich dann eine Eigenfunktionsentwicklung für den bzgl. H absolutstetigen Teilraum[21] von $L^2(\mathbb{R})$ definieren, d.h. man kann mit Hilfe der Lösungen der LSGLen eine Abbildung konstruieren, die H teilweise diagonalisiert. Die Eigenfunktionsentwicklung leistet also zumindest teilweise das, was im Falle von $-\Delta$ durch die Fouriertransformation erreicht wird.

Satz 7.1 :

Seien $n \in \mathbb{N}$,

$$\psi_\pm^{\gtrless}(x,E) := \frac{\varphi_\pm^{\gtrless}(x,E)}{iW(\varphi_-^{\gtrless}, \varphi_+^{\gtrless})(E)} \qquad (x \in \mathbb{R},\ E \in E_n^{>}(U))$$

$$\psi_\pm^{\lessgtr}(x,E) := \frac{\varphi_\pm^{\lessgtr}(x,E)}{iW(\varphi_-^{\lessgtr}, \varphi_+^{\lessgtr})(E)} \qquad (x \in \mathbb{R},\ E \in E_n^{<}(U)).$$

a) Für $E \in E_n^{=}(U)$ sind $\psi_\pm^{\gtrless}(\cdot, E)$ jeweils die eindeutigen beschränkten Lösungen der entsprechenden LSGL

$$\psi(x,E) = u_\pm(x,E) - \int_{\mathbb{R}} R_0^{\gtrless}(x,y,E)Q(y)\psi(y,E)dy \qquad (x \in \mathbb{R}) \qquad (7.1\ a)$$

[20] siehe dazu [R\S-III, Chapter XI.6]

[21] siehe Definition 7.2

sowie $\psi^{\leq}_{\pm}(\cdot, E)$ jeweils die eindeutigen beschränkten Lösungen der entsprechenden LSGL

$$\psi(x,E) = u_{\pm}(x,E) - \int_{\mathbb{R}} R_0^{\leq}(x,y,E)Q(y)\psi(y,E)dy \qquad (x \in \mathbb{R}). \qquad (7.1\text{ b})$$

b) Für $E \in E_n^{\geq}(U)$ sind

$$\overline{\psi^{\geq}_{\pm}(x,E)} = \psi^{\leq}_{\mp}(x,\overline{E}) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

c) Es gilt für alle $E \in E_n^{=}(U)$ und alle $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}(R^{\geq}(x,y,E) - R^{\leq}(x,y,E)) &= \frac{1}{2\pi}(\psi^{\geq}_{-}(x,E)\overline{\psi^{\geq}_{-}(y,E)} + \psi^{\geq}_{+}(x,E)\psi^{\geq}_{+}(y,E)) \\ &= \frac{1}{2\pi}(\psi^{\leq}_{-}(x,E)\overline{\psi^{\leq}_{-}(y,E)} + \psi^{\leq}_{+}(x,E)\psi^{\leq}_{+}(y,E)).\end{aligned}$$

Beweis :

a) Seien $n \in \mathbb{N}$, $E \in E_n^{=}(U)$ und $c > 0$. Das Argument E wird häufig weggelassen. Mit zweifacher partieller Integration unter Berücksichtigung der Sprungstelle bei $x = y$ von $R_0^{\geq}$ und unter Verwendung von

$$(-\Delta_y + V(y) - E)R_0^{\geq}(x,y,E) = 0 \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

ist dann:

$$\begin{aligned}\int_{-c}^{c} R_0^{\geq}(x,y)(-\Delta_y \psi^{\geq}_{-}(y))dy = &-R_0^{\geq}(x,y)\psi^{\geq\prime}_{-}(y) + D_2 R_0^{\geq}(x,y)\psi^{\geq}_{-}(y)\Big|_x^c + \\ &+(-R_0^{\geq}(x,y)\psi^{\geq\prime}_{-}(y) + D_2 R_0^{\geq}(x,y)\psi^{\geq}_{-}(y))\Big|_{-c}^{x} \\ &- \int_{-c}^{c} R_0^{\geq}(x,y)(V(y) - E)\psi^{\geq}_{-}(y)dy \qquad (x \in (-c,c)). \qquad (7.2)\end{aligned}$$

Um die Randterme auszuwerten, verwendet man Satz 6.3 1b), 2b). Damit folgen aus (7.2):

$$-\int_{-c}^{c} R_0^{\geq}(x,y)\psi^{\geq}_{-}(y)dy = \int_{-c}^{c} R_0^{\geq}(x,y)(-\Delta_y + V(y) - E)\psi^{\geq}_{-}(y)dy$$

$$= -i\ \Big(-u_{-}(x)\ [u_{+}(c)\psi^{\geq\prime}_{-}(c) - u'_{+}(c)\psi^{\geq}_{-}(c)]$$

$$+ u_{+}(x)\ [u_{-}(-c)\psi^{\geq\prime}_{-}(-c) - u'_{-}(-c)\psi^{\geq}_{-}(-c)]$$

$$+ u_{-}(x)\ [u_{+}(x)\psi^{\geq\prime}_{-}(x) - u'_{+}(x)\psi^{\geq}_{-}(x)]$$

$$- u_{+}(x)\ [u_{-}(x)\psi^{\geq\prime}_{-}(x) - u'_{-}(x)\psi^{\geq}_{-}(x)]\Big) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Mit Satz 6.3 1), 2) liegt folgendes asymptotisches Verhalten vor:

$$-\int_{-c}^{c} R_0^{\geq}(x,y)\psi^{\geq}_{-}(y)dy =$$

$$= -i\Big(-u_{-}(x)\ i\ W(\varphi^{\geq}_{-},\varphi^{\geq}_{+})\ ([\psi^{\geq}_{+}(c) + o(1)]\psi^{\geq\prime}_{-}(c) - [\psi^{\geq\prime}_{+}(c) + o(1)]\psi^{\geq}_{-}(c))$$

$$+ u_{+}(x)\ (i\ W(\varphi^{\geq}_{-},\varphi^{\geq}_{+}))^{-1}(u_{-}(-c)[u'_{-}(-c) + o(1)] - u'_{-}(-c)[u_{-}(-c) + o(1)])$$

$$- W(u_{-},u_{+})\psi^{\geq}_{-}(x)\Big) \qquad (c \to \infty) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Der Grenzübergang $c \to \infty$ liefert :

$$-\int_{\mathbb{R}} R_0^{\geq}(x,y)\psi^{\geq}_{-}(y)dy = u_{-}(x)W(\varphi^{\geq}_{-},\varphi^{\geq}_{+})W(\psi^{\geq}_{-},\psi^{\geq}_{+}) + 0 + \psi^{\geq}_{-}(x)$$

$$= u_{-}(x) + \psi^{\geq}_{-}(x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Angenommen es gäbe neben $\psi^{\geq}_{-}$ eine weitere beschränkte Lösung f der LSGL (7.1). Durch das Anwenden von $(-\Delta + V - E)$ auf f erhält man unter Berücksichtigung von Satz 6.4 3) und (7.1)

$$(-\Delta + V(x) + Q(x) - E)u(x) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Da mit $\{\varphi^{\geq}_{-},\varphi^{\geq}_{+}\}$ auch $\{\psi^{\geq}_{-},\psi^{\geq}_{+}\}$ Fundamentalsystem dieser DGL ist, existieren $a, b \in \mathbb{C}$, so daß gilt:

$$f = a\psi^{\geq}_{-} + b\psi^{\geq}_{+}. \tag{7.3}$$

Jede der 3 Funktionen löst eine der LSGLen (7.1 a), so daß folgt

$$u_-(x) = f(x) + \int_{\mathbb{R}} R_0^{\gtrless}(x,y)Q(y)f(x)dy$$

$$= a\psi_-^{\gtrless}(x) + b\psi_+^{\gtrless}(x) + \int_{\mathbb{R}} R_0^{\gtrless}(x,y)Q(y)(a\psi_-^{\gtrless}(y) + b\psi_+^{\gtrless}(y))dy$$

$$= au_-(x) + bu_+(x).$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit von $\{u_-, u_+\}$ sind $a = 1$ und $b = 0$, d.h. aber nach (7.3) es ist $f = \psi_-^{\gtrless}$.

b) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $E \in E_n^{\gtrless}(U)$. Dann ist nach Satz 6.3 3)

$$\overline{\psi_\pm^{\gtrless}(x,E)} = \frac{\overline{\varphi_\pm^{\gtrless}(x,E)}}{iW(\varphi_-^{\gtrless}, \varphi_+^{\gtrless})(E)} = \frac{\varphi_\mp^{\gtrless}(x,\overline{E})}{iW(\varphi_-^{\gtrless}, \varphi_+^{\gtrless})(\overline{E})} = \psi_\mp^{\lessgtr}(x,\overline{E}) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

c) Für $E \in E_n^{>}(U)$ folgt aus $R(E)^* = R(\overline{E})$ die Beziehung

$$\overline{R^{\geq}(x,y,E)} = R^{\leq}(y,x,\overline{E}) \qquad (x,y \in \mathbb{R}). \tag{7.5}$$

Sei nun $E \in E_n^{=}(U)$. Mit der Stetigkeit von $R^{\geq}$ und $R^{\leq}$ im dritten Argument (Satz 6.4 1b)) folgt aus (7.5)

$$R^{\geq}(x,y,E) = R^{\leq}(y,x,E) \qquad (x,y \in \mathbb{R}).$$

Dies liefert zusammen mit Satz 6.4 1c) die Symmetrie von $R^{\geq}(\cdot,\cdot,E)$ und $R^{\leq}(\cdot,\cdot,E)$. Damit ist die linke Seite in c) symmetrisch in x und y.
Aus (6.15) folgt

$$\varphi_-^{\leq} = \overline{c_{22}}\, \varphi_+^{\leq} + \overline{c_{21}}\, \varphi_-^{\geq}$$

und (6.14) sagt aus, daß gilt

$$\varphi_-^{\geq} = c_{11}\, \varphi_+^{\geq} + c_{12}\, \varphi_-^{\leq}.$$

Nach Satz 6.3 ist $0 \neq W(\varphi_-^{\geq}, \varphi_+^{\geq}) = ic_{21} = ic_{22}$, so daß es möglich ist, die Gleichungen umzustellen:

$$\varphi^{\geq}_{-} = \frac{1}{\overline{c_{21}}}\, \varphi^{\leq}_{-} - \frac{\overline{c_{22}}}{\overline{c_{21}}}\, \varphi^{\leq}_{+} \tag{7.6}$$

$$\varphi^{\leq}_{-} = \frac{1}{c_{12}} \varphi^{\geq}_{-} - \frac{c_{11}}{c_{12}}\, \varphi^{\geq}_{+}. \tag{7.7}$$

Es folgt aus (7.6) und (7.7) unter Berücksichtigung von Satz 6.3 3), 4)

$$\frac{1}{i}\,(R^{\geq}(x,y) - R^{\leq}(x,y)) = \frac{1}{i}\,\Big(\frac{\varphi^{\geq}_{-}(r_<,E)\varphi^{\geq}_{+}(r_>,E)}{-W(\varphi^{\geq}_{-},\varphi^{\geq}_{+})(E)} - \frac{\varphi^{\leq}_{+}(r_<,E)\varphi^{\leq}_{-}(r_>,E)}{W(\varphi^{\leq}_{-},\varphi^{\leq}_{+})(E)}\Big)$$

$$= -\frac{1}{c_{12}}\Big(\frac{1}{\overline{c_{21}}}\, \varphi^{\leq}_{-}(r_<) - \frac{\overline{c_{22}}}{\overline{c_{21}}}\, \varphi^{\leq}_{+}(r_<)\Big)\varphi^{\geq}_{+}(r_>) - \frac{1}{c_{12}}\, \varphi^{\leq}_{+}(r_<)\Big(\frac{1}{c_{12}}\varphi^{\geq}_{-}(r_>) - \frac{c_{11}}{c_{12}}\varphi^{\geq}_{+}(r_>)\Big)$$

$$= -\frac{1}{|c_{12}|}\, \varphi^{\leq}_{-}(r_<)\varphi^{\geq}_{+}(r_>) + \frac{c_{11}+\overline{c_{22}}}{|c_{21}|}\, \varphi^{\leq}_{+}(r_<)\varphi^{\geq}_{+}(r_>) - \frac{1}{|c_{12}|}\, \varphi^{\leq}_{+}(r_<)\varphi^{\geq}_{-}(r_>)$$

$$= \varphi^{\leq}_{-}(r_<)\varphi^{\geq}_{+}(r_>) + \varphi^{\leq}_{+}(r_<)\varphi^{\geq}_{-}(r_>) \qquad (x,y \in \mathbb{R}).$$

Mit b) folgt :

$$\frac{1}{i}\,(R^{\geq}(x,y) - R^{\leq}(x,y)) = \overline{\psi^{\geq}_{+}}(r_<)\psi^{\geq}_{+}(r_>) + \overline{\psi^{\geq}_{-}}(r_<)\psi^{\geq}_{-}(r_>)$$

$$= \psi^{\leq}_{-}(r_<)\overline{\psi^{\leq}_{-}}(r_>) + \psi^{\leq}_{+}(r_<)\overline{\psi^{\leq}_{+}}(r_>) \qquad (x,y \in \mathbb{R}),$$

so daß wegen der Symmetrie c) folgt. □

Definition 7.2 :

Es seien $\{P^0_E\}_{E\in\mathbb{R}}$ und $\{P_E\}_{E\in\mathbb{R}}$ die Spektralscharen von H_0 bzw. H sowie P^0_{ac} und P_{ac} die Orthogonalprojektoren auf

$$\{f \in L^2(\mathbb{R}) /\ (f, P^0_{(\cdot)} f) \text{ ist absolutstetig}\}$$

bzw. $$\{f \in L^2(\mathbb{R}) /\ (f, P_{(\cdot)} f) \text{ ist absolutstetig}\}.$$

Satz 7.3 :

Sei $M := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n^{=}(U)$, und definiere

$$F^{\geq} : \; L_0^2(\mathbb{R}) \to L^2(M) \oplus L^2(M)$$
$$F^{\geq} f(E) := \langle F_{-}^{\geq} f(E),\; F_{+}^{\geq} f(E) \rangle := \langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi_{-}^{\geq}(x,E)}\, f(x)dx, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi_{+}^{\geq}(x,E)} f(x)dx \rangle.$$

Dann gilt:

a) Es besitzt $F^{\geq}$ eine eindeutige beschränkte Fortsetzung auf $L^2(\mathbb{R})$ (die auch mit $F^{\geq}$ bezeichnet wird).

b) Die Restriktion von $F^{\geq}$ auf $Ran\ P_{ac}$ ist unitär.

c) Für jede meßbare Funktion u gilt

$$F^{\geq} u(H) f = \tilde{u} F^{\geq} f \qquad\qquad (f \in Ran\ P_{ac}),$$

wobei $\tilde{u}$, der zu u gehörige Multiplikationsoperator in $L^2(M) \oplus L^2(M)$, definiert sei durch

$$(\tilde{u}s)(x) := \langle u(x)s_{-}(x), u(x)s_{+}(x) \rangle \qquad (s = \langle s_{-}, s_{+} \rangle \in L^2(M) \oplus L^2(M),\ x \in M).$$

Die analog definierte Abbildung $F^{\geq}$ hat die gleichen Eigenschaften. Weiterhin gilt:

d) Es ist $Ran\ P_M = Ran\ P_{ac}$.

Beweis :

1. Behauptung :

Seien $f \in L_0^2(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$ und $[a,b] \in E_n^{=}(U)$. Dann sind $|F_{-}^{\geq} f|^2 + |F_{+}^{\geq} f|^2$, $|F_{-}^{\leq} f|^2 + |F_{+}^{\leq} f|^2 \in L^1([a,b])$ und es gilt

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} (f, R(E+i\epsilon) - R(E-i\epsilon)f)dE = \int_a^b |F_{-}^{\geq} f|^2 + |F_{+}^{\geq} f|^2 = \int_a^b |F_{-}^{\leq} f|^2 + |F_{+}^{\leq} f|^2.$$

Beweis :

Seien $n \in \mathbb{N}, [a,b] \subset E_n^{=}(U), f \in L_0^2(\mathbb{R})$ und $\alpha > 0$, so daß gilt

$$K_\alpha := \{z \in \mathbb{C} / \mid Im(z) \mid \leq \alpha,\ Re(z) \in [a,b]\} \subset\subset E_n(U).$$

Nach Satz 6.4 1a) gibt es ein $c_\alpha > 0$, so daß

$$\left|\overline{f(x)}(R_x^{\geq}(x,y,E+i\epsilon)-R_x^{\leq}(x,y,E-i\epsilon))f(y)\right|\leq c_\alpha\left|\overline{f(x)}\right|\left|f(y)\right|$$

$$(x,y\in\mathbb{R},\ E\in[a,b],\ |\epsilon|<\alpha),$$

wobei wegen $L^1(\mathbb{R})\supset L_0^2(\mathbb{R})$ die Majorante in $L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times[a,b])$ liegt. Die Stetigkeit von $R^{\geq}$ und $R^{\leq}$ im letzten Argument (Satz 6.4 1b)) sichert punktweise Konvergenz. Man darf also den Satz über majorisierte Konvergenz anwenden, erhält :

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}}(f,R(E+i\epsilon)-R(E-i\epsilon)f)dE=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_a^b\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\overline{f(x)}(R^{\geq}(x,y,E+i\epsilon)-R^{\leq}(x,y,E-i\epsilon))f(y)dydxdE$$

und weiß, daß der Integrand in $L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times[a,b])$ ist. Deshalb darf man im folgenden nach dem Satz von Fubini die Integrationsreihenfolge vertauschen. Mit Satz 7.1 c) folgt einerseits

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}}(f,R(E+i\epsilon)-R(E-i\epsilon)f)dE=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_a^b\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\overline{f(x)}\left(\psi_{-}^{\leq}(x,E)\overline{\psi_{-}^{\leq}(y,E)}+\psi_{+}^{\leq}(x,E)\overline{\psi_{+}^{\leq}(y,E)}\right)f(y)dydxdE$$

$$=\int_a^b\left|F_{-}^{\leq}f(E)\right|^2+\left|F_{+}^{\leq}f(E)\right|^2dE$$

und andererseits

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}}(f,R(E+i\epsilon)-R(E-i\epsilon)f)dE=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_a^b\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\overline{f(x)}\left(\psi_{+}^{\geq}(x,E)\overline{\psi_{+}^{\geq}(y,E)}+\psi_{-}^{\geq}(x,E)\overline{\psi_{-}^{\geq}(y,E)}\right)f(y)dydxdE$$

$$=\int_a^b\left|F_{-}^{\geq}f(E)\right|^2+\left|F_{+}^{\geq}f(E)\right|^2dE,$$

womit die 1. Behauptung gezeigt ist.

Ab jetzt wird nur noch der Fall " $\geq$ " betrachtet.

2. Behauptung :

Sei $f \in L^2_0(\mathbb{R})$. Dann gilt

$$(f, P_B f) = \int_B \left|F^{\geq}_{-} f\right|^2 + \left|F^{\geq}_{+} f\right|^2 \quad (B \subset M, \text{Borelmenge}).$$

Beweis :

Sei $f \in L^2_0(\mathbb{R})$. Nach der Stoneschen Formel[22] folgt die Behauptung für alle offenen, abgeschlossenen oder halboffenen Intervalle, deren Abschluß in M liegt, aus der 1. Behauptung; denn obiges Integral hängt stetig von seinen Grenzen ab.
Sei nun $O \subset M$. Dann läßt sich O darstellen als disjunkte Vereinigung abzählbar vieler Intervalle deren Abschluß in M liegt. Sei $\{I_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ eine solche Folge von Intervallen. Für $i \in \mathbb{N}$ sei $O_i := \bigcup_{j \leq i} I_j$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|f\| \geq (f, P_{O_i} f) &= \sum_{j \leq i} (f, P_{I_j} f) = \sum_{j \leq i} \int_{I_j} \left|F^{\geq}_{-} f\right|^2 + \left|F^{\geq}_{+} f\right|^2 \\ &= \int_M \chi_{O_i} \left(\left|F^{\geq}_{-} f\right|^2 + \left|F^{\geq}_{+} f\right|^2 \right). \end{aligned}$$

Mit dem Satz über monotone Konvergenz ist also

$$(f, P_O f) = \lim_{i \to \infty} (f, P_{O_i} f) = \lim_{i \to \infty} \int_M \chi_{O_i} \left(\left|F^{\geq}_{-} f\right|^2 + \left|F^{\geq}_{+} f\right|^2 \right),$$

d.h die Behauptung ist für alle offenen Teilmengen von M gezeigt. Insbesondere ist also $\left|F^{\geq}_{-} f\right|^2 + \left|F^{\geq}_{+} f\right|^2 \in L^1(M)$, so daß durch

$$\tilde{\mu}_f(B) := \int_B \left|F^{\geq}_{-} f\right|^2 + \left|F^{\geq}_{+} f\right|^2 \qquad (B \subset M, \text{Borelmenge})$$

neben dem Spektralmaß $d(f, P_{(\cdot)} f)$ ein weiteres Borelmaß definiert ist. Da diese Borelmaße auf allen offenen Mengen übereinstimmen, sind sie gleich, d.h. die Behauptung ist bewiesen.

Die 2. Behauptung liefert insbesondere

$$\left\|F^{\geq} f\right\|^2 = \|P_M f\|^2 \leq \|f\|^2 \qquad (f \in L^2_0(\mathbb{R})),$$

so daß mit dem B.L.T. Theorem a) folgt.

[22] siehe [R\S-I, Theorem VII-13] und [R\S-I, p. 264]

Mit einem Stetigkeitsargument und der 2. Behauptung ist für alle $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$(f, P_B f) = \int_B \left|F_-^{\geq} f\right|^2 + \left|F_+^{\geq} f\right|^2 = \left\|\tilde{\chi}_B F^{\geq} f\right\|^2 \qquad (B \subset M, \text{Borelmenge}). \tag{7.8}$$

Für jedes $f \in L^2(\mathbb{R})$ ist also $(f, P_{(\cdot)} f)$ absolutstetig in M, d.h. $(P_M f, P_{(\cdot)} P_M f)$ ist absolutstetig in $\mathbb{R}$, so daß gilt

$$Ran\ P_M \subset Ran\ P_{ac}. \tag{7.9}$$

Andererseits gilt

$$Ran\ P_{\overline{M}} \supset Ran\ P_{\sigma_{ac}(H)} \supset Ran\ P_{ac}. \tag{7.10}$$

Denn mit "Weyl's essential spectrum theorem[23]" Satz 6.4 2c) und Satz 5.3 ist zunächst

$$\overline{M} = \sigma(H_0) = \sigma_{ess}(H_0) = \sigma_{ess}(H) \supset \sigma_{ac}(H). \tag{7.10 a}$$

Weiterhin ist für $f \in Ran\ P_{ac}$ nach [R\S-I, Proposition p.236]

$$P_{(E-\epsilon, E+\epsilon)} f = 0 \qquad (E \notin \sigma_{ac}(H), \epsilon > 0 \text{ geeignet}),$$

d.h. wegen der Abgeschlossenheit von $\sigma_{ac}(H)$ gilt $(1 - P_{\sigma_{ac}(H)})f = 0$ also

$$Ran\ P_{ac}(H) \subset Ran\ P_{\sigma_{ac}(H)}.$$

Aus (7.9) und (7.10) folgt schließlich d).
Um den Wertebereich von $F^{\geq}$ zu untersuchen, wird die Gleichung $W(F^{\geq}) = N(F^{\geq *})^{\perp}$ verwendet, d.h. man interessiert sich für den Adjungierten von $F^{\geq}$.

<u>3. Behauptung :</u>

Es ist

$$F^{\geq *} s(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_M (\psi_-^{\geq}(x, E) s_-(E) + \psi_+^{\geq}(x, E) s_+(E)) dE$$

$$(s = \langle s_-, s_+ \rangle \text{ mit } s_\pm \in L_0^2(M)). \tag{7.11}$$

[23]siehe [R\S-IV, Theorem XIII.14, Corollary 1]

Beweis :

Seien $s_\pm \in L_0^2(M)$ und $f \in L_0^2(\mathbb{R})$. Dann gilt mit dem Satz von Fubini

$$(s, F^{\geq} f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_M \left(\overline{s_-(E)} \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi_-^{\geq}(x,E)} f(x) dx + \overline{s_+(E)} \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi_+^{\geq}(x,E)} f(x) dx \right) dE$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \overline{\left(\int_M (\psi_-^{\geq}(x,E) s_-(E) + \psi_+^{\geq}(x,E) s_+(E)) \, dE \right)} f(x) \, dx.$$

Da $L_0^2(\mathbb{R})$ dicht in $L^2(\mathbb{R})$ liegt, folgt die Behauptung.

4. Behauptung :

Für alle Borelmengen $B \subset M$ gilt

$$\tilde{\chi}_B F^{\geq} = F^{\geq} P_B$$

und damit

$$F^{\geq *} \tilde{\chi}_B = P_B F^{\geq *}.$$

Beweis :

Seien $B \subset M$, Borelmenge und $f \in L^2(\mathbb{R})$. Dann ist mit der 2. Behauptung

$$0 = \| P_B(P_B f - f) \| = \| \tilde{\chi}_B F^{\geq} (P_B f - f) \|.$$

Damit ist

$$\left\| F^{\geq} P_B f - \tilde{\chi}_B F^{\geq} f \right\| = \left\| F^{\geq} P_B f - \tilde{\chi}_B F^{\geq} P_B f \right\| = \left\| \tilde{\chi}_{M \setminus B} \, F^{\geq} P_B f \right\|$$

$$= \left\| \tilde{\chi}_{M \setminus B} \, F^{\geq} P_{M \setminus B} P_B f \right\| = 0,$$

so daß die Behauptung folgt.

Für den Beweis der Injektivität von $F^{\geq *}$ sei $s = \langle s_-, s_+ \rangle \in L^2(M) \oplus L^2(M)$ mit $F^{\geq *} s = 0$. Um (7.7) verwenden zu können, betrachtet man zunächst ein Intervall $[a,b] \in M$. Denn dann ist $\chi_{[a,b]} s_+ \in L_0^2(\mathbb{R})$.

Sei $B \subset M$, Borelmenge. Dann gibt es eine Nullmenge $N \subset \mathbb{R}$ so, daß unter Verwendung der 4. Behauptung gilt

$$0 = (P_B F^{\geq *} s)(x) = F^{\geq *}(\tilde{\chi}_B s)(x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_B (\psi_-^{\geq}(x,E)s_-(E) + \psi_+^{\geq}(x,E)s_+(E))dE \qquad (x \in \mathbb{R}\backslash N).$$

Sei $x \in N$. Dann gilt mit einer geeigneten gegen x konvergenten Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}\backslash N$ und dem Satz über majorisierte Konvergenz :

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{x_n \to x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_B (\psi_-^{\geq}(x_n,E)s_-(E) + \psi_+^{\geq}(x_n,E)s_+(E))dE \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_B (\psi_-^{\geq}(x,E)s_-(E) + \psi_+^{\geq}(x,E)s_+(E))dE = P_B F^{\geq *}s(x), \end{aligned}$$

wobei punktweise Konvergenz aus der Stetigkeit von $\psi_\pm(\cdot, E)$ für festes $E \in [a,b]$ (Satz 6.3 1), 2)) folgt, und die Existenz einer L^1-Majorante durch Satz 6.3 1b), 2b) garantiert ist. Es gilt also für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle Borelmengen $B \subset [a,b]$

$$0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_B (\psi_-^{\geq}(x,E)s_-(E) + \psi_+^{\geq}(x,E)s_+(E))dE.$$

Nach [R, Theorem 1.39] gibt es damit für jedes $x \in \mathbb{R}$ ein $N_x \subset [a,b]$, so daß

$$0 = \psi_-^{\geq}(x,E)s_-(E) + \psi_+^{\geq}(x,E)s_+(E) \qquad (E \in [a,b]\backslash N_x).$$

Sei $N := \bigcup_{x \in \mathbb{Q}} N_x$. Dann ist N Nullmenge und es gilt

$$0 = \psi_-^{\geq}(x,E)s_-(E) + \psi_+^{\geq}(x,E)s_+(E) \qquad (E \in [a,b]\backslash N,\ x \in \mathbb{Q}).$$

Seien $x \in \mathbb{R}$, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine gegen x konvergente Folge in $\mathbb{Q}$ und $E \in [a,b]\backslash N$. Dann folgt wegen der Stetigkeit von $\psi_\pm^{\geq}(\cdot, E)$

$$\psi_-^{\geq}(x,E)s_-(E) + \psi_+^{\geq}(x,E)s_+(E) = \lim_{n \to \infty} \psi_-^{\geq}(x,E)s_-(E) + \psi_+^{\geq}(x,E)s_+(E) = 0$$

und wegen der linearen Unabhängigkeit von $\{\psi_-^{\geq}(\cdot, E), \psi_+^{\geq}(\cdot, E)\}$ ist

$$s(E) = \langle s_-(E), s_+(E) \rangle = \langle 0, 0 \rangle = 0.$$

Da M die abzählbare Vereinegung von abgeschlossenen Intervallen ist, gilt $s(E) = 0$ für fast alle $E \in M$. Damit ist $F^{\geq *}$ injektiv, und b) ist gezeigt.
Zum Beweis von c) seien $u: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ meßbar und $f \in Ran\ P_M \cap D(u(H))$. Dann ist nach dem Spektralkalkül und der 2. Behauptung

$$(f,u(H)f) = \int_{\mathbb{R}} u(E)d(f,P_Ef) = \int_{\mathbb{R}} u(E)d(f,P_EP_Mf) = \int_M u(E)d(f,P_Ef) =$$
$$= \int_M u\,\left(\left|F^{\geq}_{-}f\right|^2 + \left|F^{\geq}_{+}f\right|^2\right) = (F^{\geq}f, \tilde{u}F^{\geq}f) = (f,(F^{\geq *})\tilde{u}F^{\geq}f).$$

Mit der Polarisationsidentiät (3.0) folgt

$$u(H)f - (F^{\geq *})\tilde{u}F^{\geq}f \perp Ran\ P_M \cap D(u(H)),$$

d.h.
$$u(H)f - (F^{\geq *})\tilde{u}F^{\geq}f \perp Ran\ P_M.$$

Da mit der 4. Behauptung gilt

$$(F^{\geq *})\tilde{u}F^{\geq}f = (F^{\geq *})\tilde{u}F^{\geq}P_Mf = (F^{\geq *})\tilde{u}\chi_MF^{\geq}f = P_M(F^{\geq *})\tilde{u}F^{\geq}f,$$

ist $u(H)f - (F^{\geq *})\tilde{u}F^{\geq}f \in Ran\ P_M$ und damit Null. □

Bemerkung :

– Im Beweis der 1. Behauptung sieht man, daß als abstraktes Hilfsmittel die Stonesche Formel eingeht, die das Bindeglied zwischen der Resolvente und der Spektralschar darstellt. An dieser Stelle ist die gute Kontrolle über die Greensfunktion und deren Grenzwert entscheidend.

– Auf den ersten Blick mag beim Vergleich dieser Eigenfunktionsentwicklung mit der (herkömmlichen) Fouriertransformation überraschen, daß zur Diagonalisierung zwei Kopien des $L^2(M)$ notwendig sind, d.h. daß die Multiplizität zwei ist. Dies ist jedoch nur scheinbar ein Widerspruch, weil man bei der Fouriertransformation die Wurzel des Eigenwertes als Parameter wählt, so daß auch hier jeder Eigenwert zweimal angenommen wird, wenn der Parameter die reelle Achse durchläuft.

Korollar 7.4 :

Sei $F : L^2_0(\mathbb{R}) \to L^2(M) \oplus L^2(M)$
$$Ff(E) := \langle F_-f(E),\ F_+f(E)\rangle := \langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \overline{u_-(x,E)}\, f(x)dx,\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \overline{u_+(x,E)} f(x)dx\rangle.$$

Dann gelten

a) Es besitzt F eine eindeutige unitäre Fortsetzung auf $L^2(\mathbb{R})$ (die auch mit F bezeichnet wird).

b) Für jede meßbare Funktion u ist

$$Fu(H)f = \tilde{u}Ff.$$

Beweis :
Die Behauptung folgt aus Satz 7.3 im Spezialfall $Q = 0$ und $Ran\ P_{ac} = L^2(\mathbb{R})$ (Satz 5.3)□

Korollar 7.5 :
Das Spektrum des Operators H setzt sich zusammen aus dem absolutstetigen Spektrum $\sigma_{ac}(H) = \sigma(H_0)$ und eventuell aus Eigenwerten, die jedoch nicht im Bandinneren liegen können, d.h es gilt

$$\sigma_{pp}(H) \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n^{=}(U) = \emptyset.$$

Beweis :
Nach (7.10 a)) gilt $\sigma_{ess}(H) = \sigma(H_0) = \overline{M}$, und da nach Satz 7.3 d) das Spektrum im Bandinneren rein absolutstetig ist, könnte höchstens $\overline{M}\backslash M$ zum sigulärstetigen Spektrum gehören, dies ist aber wegen der Abzähbarkeit von $\overline{M}\backslash M$ ausgeschlossen.

8. Wellenoperatoren und Streuoperator

Für den Beweis der Existenz und Vollständigkeit der Wellenoperatoren[24] kann man Ergebnisse von Kato und Birman[25] über die Streuung bei Störungen aus der Spurklasse verwenden.
Die Eigenfunktionsentwicklung aus dem letzten Kapitel ermöglicht dann eine konkrete Darstellung der Wellenoperatoren und damit des Streuoperators $S := \Omega^+\Omega^{-*}$. Dabei wird eingehen, daß die Eigenfunktionen die LSGLen lösen.

[24] siehe Satz 8.1

[25] siehe z.B. [R\S-III, Chapter XI.3]

Satz 8.1 :

Die Wellenoperatoren

$$\Omega^{\pm} := \underset{t \to \pm\infty}{s\text{-}lim}\; e^{iHt} e^{-iH_0 t}$$

existieren und sind vollständig[26], d.h. es gilt

$$Ran\ \Omega^{+} = Ran\ \Omega^{-} = Ran\ P^0_{ac}.$$

Beweis :

Da nach Satz 6.4 2 c) für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $E \in E^{\neq}_n(U)$ die Differenz $R_0(E) - R(E)$ Spurklasse ist, folgt die Behauptung aus [K, Theorem X-4.12]. □

Zur Vorbereitung des Darstellungstheorems für die Wellenoperatoren folgen zwei Lemmata :

Lemma 8.2 :

Seien H Hilbertraum, a und b symmetrische, halbbeschränkte, abgeschlossene Formen mit $D(a) = D(b)$. Dann gilt für die assoziierten Operatoren A und B:

Für alle $f, g \in D(a)$ ist $(f, e^{iA(\cdot)} e^{-iB(\cdot)} g)$ in $\mathbb{R}$ differenzierbar und hat die

Ableitung $i(a-b)(f, e^{-iA(\cdot)} e^{-iB(\cdot)} g)$.

Beweis :

Es wird zunächst die Differenzierbarkeit an der Stelle 0 betrachtet. Seien $s \in \mathbb{R}$ und $f \in D(a)$. Mit Hilfe der Gleichung

$$(e^{iAs} e^{-iBs} - 1) = (e^{iAs} - 1)(e^{-iBs} - 1) + (e^{iAs} - 1) + (e^{-iBs} - 1)$$

folgt

[26] Die Vorzeichenkonvention bei den Wellenoperatoren und die Definition der Vollständigkeit sind von [R\S] übernommen.

$$\left|\tfrac{1}{s}(f,[e^{iAs}e^{-iBs}-1]f)-i(a-b)(f)\right| \leq \left|\tfrac{1}{s}([e^{-iAs}-1]f,[e^{-iBs}-1]f)\right|+$$

$$+\left|\tfrac{1}{s}([e^{-iAs}-1]f,f)-ia(f)\right|+\left|\tfrac{1}{s}(f,[e^{-iBs}-1]f)+ib(f)\right|. \qquad (8.1)$$

Die Grenzwerte der Summanden werden nun mit Hilfe des Funktionalkalküls und des Satzes über majorisierte Konvergenz einzeln untersucht. Man verwendet für die Majoranten die Abschätzungen:

$$\left|e^{ix}-1\right|=\left|\int_0^x (e^{it})'dt\right| \leq \int_0^x \left|e^{it}\right|dt = |x| \qquad (x\in\mathbb{R}) \qquad (8.2)$$

und $$\left|e^{ix}-1\right|^2=\left|(1-e^{+ix})-(e^{-ix}-1)\right| \leq 2\,|x| \qquad (x\in\mathbb{R}). \qquad (8.3)$$

Es gilt erstens

$$\lim_{s\to 0} \tfrac{1}{s}([e^{-iAs}-1]f,f)-ia(f)=\lim_{s\to 0}\int_{\mathbb{R}} (\tfrac{1}{s}(e^{-i\lambda s}-1)-i\lambda)d(f,E_\lambda f)=0, \qquad (8.4)$$

weil mit (8.2) der Integrand durch die Funktion

$$\lambda \mapsto 2\,|\lambda| \qquad (\lambda\in\mathbb{R})$$

majorisiert wird, die integrierbar ist, da f in $D(a)$ liegt. Zweitens gilt

$$\lim_{s\to 0}\left\|\frac{1}{\sqrt{|s|}}(e^{-iAs}-1)f\right\|^2=\lim_{s\to 0}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{|s|}\left|e^{-i\lambda s}-1\right|^2 d(f,E_\lambda f)=0, \qquad (8.5)$$

wobei hier mit (8.3) die Majorante

$$\lambda \mapsto 2\,|\lambda| \qquad (\lambda\in\mathbb{R})$$

ist. Mit (8.5) und der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung geht der erste Summand von (8.1) gegen Null, und mit (8.4) und dem Analogon für den Operator B konvergieren auch die letzten beiden Summanden.

Sei $t\in\mathbb{R}$. Da nach dem Funktionalkalkül e^{-iAt} und e^{-iBt} den Formdefinitionsbereich $D(a)$ invariant lassen, kann man die Differentiation bei t mit Hilfe von

$$(f,[e^{iA(t+s)}e^{-iB(t+s)}-e^{iAt}e^{-iBt}]f) =$$

$$= (e^{-iAt}f,[e^{iAs}e^{-iBs}-1]e^{-iBt}f) \qquad (s \in \mathbb{R})$$

auf die Differentiation bei 0 zurückführen.
Als letztes wendet man die Polarisationsidentität (3.0) an. □

Lemma 8.3 :

Sei t eine symmetrische, halbbeschränkte, abgeschlossene Form und s bzgl. t relativ formbeschränkt mit Grenze $\alpha < 1$. Dann gilt:

a) Es ist $s+t$ auch symmetrisch, halbbeschränkt und abgeschlossen.

b) Es sind $\| \ \|_t$ und $\| \ \|_{s+t}$ äquivalente Normen auf $D(t)$.

c) Es gibt ein $c > 0$, so daß gilt

$$|s(f,g)| \leq c \, \|f\|_t \, \|g\|_t \qquad (f,g \in D(t)).$$

Beweis :

a) wird in [K, Theorem VI-1.33] bewiesen.

b) Seien $\epsilon \in (0,1)$ und $\delta > 0$ so, daß

$$|s(f)| \leq \epsilon t(f) + \delta \, \|f\|^2 \qquad (f \in D(t)),$$

sowie $\gamma < -\frac{\delta}{\epsilon}$ so, daß $\gamma + 1$ untere Schranke von t und $s+t$ ist. Für $f \in D(t)$ gilt dann einerseits

$$\|f\|_{s+t}^2 = (s+t)(f) - \gamma \, \|f\|^2 \leq |s(f)| + t(f) - \gamma \, \|f\|^2$$

$$\leq (1+\epsilon)t(f) + (\delta - \gamma)\|f\|^2$$

$$< (1+\epsilon)t(f) - (1+\epsilon)\gamma \, \|f\|^2 = (1+\epsilon)\, \|f\|_t^2$$

und andererseits

$$\|f\|_{s+t}^2 = (s+t)(f) - \gamma \, \|f\|^2 \geq -|s(f)| + t(f) - \gamma \, \|f\|^2$$

$$\geq (1-\epsilon)t(f) - (\delta+\gamma)\|f\|^2$$

$$> (1-\epsilon)t(f) - (1-\epsilon)\gamma\,\|f\|^2 = (1-\epsilon)\,\|f\|_t^2.$$

c) beweist man durch Anwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung in $D(t)$. Man kann das im Beweis von [S, Theorem II.7] nachlesen. □

Satz 8.4 :
Es gelten $F^{\geq}\Omega^{+} = F$ sowie $F^{\leq}\Omega^{-} = F$ und damit $S = F^{*}(F^{\leq}F^{\geq *})F$.

Beweis :
Es wird nur die erste Gleichung bewiesen, weil der Beweis der zweiten analog verläuft. Seien

$$A = \{f \in Ran\ P_{ac}(H)\ /\ F^{\geq}_{\pm} f \in C_0^\infty(M),\ supp\ F^{\geq}_{\pm} f \subset E_n^{=}(U)\ (n \in \mathbb{N}\text{ geeignet})\}$$
und $B = \{f \in L^2(\mathbb{R})\ /\ F_{\pm} f \in C_0^\infty(M),\ supp\ F_{\pm} f \subset E_n^{=}(U)\ (n \in \mathbb{N}\text{ geeignet})\}$.

Dann genügt es, zu zeigen :

$$(f, \Omega^{+} g) = (F^{\geq} f, Fg) \qquad (f \in A, g \in B). \tag{8.6}$$

Denn mit (8.6) und der Unitarität von F (Korollar 7.4) ist dann

$$(F^{\geq} f, Fg) = (f, \Omega^{+} g) = (F\Omega^{+*} f, Fg) \qquad (f \in A, g \in B),$$

und die Dichtheit von A in $Ran\ P_{ac}$ und $F(B)$ in $L^2(M) \oplus L^2(M)$ liefert

$$F^{\geq} f = F\Omega^{+*} f \qquad (f \in Ran\ P_{ac}).$$

Wegen der Unitarität und der Vollständigkeit von $\Omega^{\pm}$ folgt

$$F^{\geq}\Omega^{+} f = F\Omega^{+*}\Omega^{+} f = Ff \qquad (f \in L^2(\mathbb{R})),$$

d.h der Satz wäre bewiesen.
Es werden noch weitere Regularitätseigenschaften von A und B benötigt:

1. Behauptung :

Es gelten

a) $B \subset L^1(\mathbb{R})$,

b) $B \subset H^1(\mathbb{R})$ und

c) $A \subset H^1(\mathbb{R})$.

Beweis :

Seien $g \in B, x \in \mathbb{R}$ und $K := supp\ F_- g\ \cup\ supp\ F_+ g$.

Dann ist

$$g(x) = (F^* F g)(x) = \int_M (u_-(x,E) F_- g(E) + u_+(x,E) F_+ g(E)) dE.$$

Nach Satz 6.2 1a) und dem Mittelwertsatz ist

$$\left| \frac{u_\pm(x,E) - u_\pm(x+t,E)}{t} \right| \leq \sup_{E \in K} \|u'_\pm(\cdot, E)\|_\infty < \infty \qquad (t \in \mathbb{R}, E \in K),$$

so daß wegen des kompakten Trägers von $F_\pm g$ nach dem Satz über majorisierte Konvergenz g differenzierbar ist mit

$$g'(x) = \int_M (D_1 u_-(x,E) F_- g(E) + D_1 u_+(x,E) F_+ g(E)) dE. \tag{8.7}$$

Wiederum wegen des kompakten Trägers von $F_\pm g$ ist $g' \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Zur Untersuchung des Abfallverhaltens seien nun $x \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann ist mit Satz 6.2 a)

$$\int_{E_n^=(U)} D_1 u_\pm(x,E) F_\pm g(E) dE = \int_0^\pi D_1 u_\pm(x, E_n(k)) F_\pm g(E_n(k)) E_n'(k) dk$$

$$= \int_0^\pi e^{\pm(-1)^n ikx} \left(D_1 p_\pm(x, E_n(k)) \pm (-1)^n ik\right) F_\pm g(E_n(k))\ E_n'(k)\ dk,$$

wobei ausgenutzt wurde, daß E_n in $(0,\pi)$ reellanalytisch ist. Damit hat der Integrand in $(0,\pi)$ kompakten Träger und ist rellanalytisch in k. Zweifache partielle Integration ergibt :

$$\int_{E_n^=(U)} D_1 u_\pm(x,E) F_\pm g(E) dE =$$

$$= \frac{1}{-x^2} \int_0^{\pi} e^{\pm(-1)^n ikx} \frac{d^2}{dk^2} [(D_1 p_{\pm}(x, E_n(k)) \pm (-1)^n ik) \, F_{\pm} g(E_n(k)) \, E_n'(k)] \, dk, \tag{8.8}$$

nach Satz 6.2 1) ist $k \mapsto \| D_1 p_{\pm}(\cdot, E_n(k)) \|_\infty$ lokal in U beschränkt. Mit der Cauchy-Ungleichung [R, Theorem 10.25] sieht man ein, daß auch

$$k \mapsto \left\| \frac{\partial}{\partial k} D_1 p_{\pm}(\cdot, E_n(k)) \right\|_\infty \text{ und } k \mapsto \left\| \frac{\partial^2}{\partial k^2} D_1 p_{\pm}(\cdot, E_n(k)) \right\|_\infty \text{ in } U \text{ beschränkt sind.}$$

Wegen des kompakten Trägers von $(F_{\pm} g) \circ E_n$ ist insbesondere der Integrand in (8.8) beschränkt, und es folgt mit (8.7)

$$|g'(x)| \leq c \, \frac{1}{x^2} \qquad (c > 0 \text{ geeignet}).$$

Ähnlich zeigt man

$$|g(x)| \leq \tilde{c} \, \frac{1}{x^2} \qquad (\tilde{c} > 0 \text{ geeignet}).$$

Zusammen mit $g \in L^2(\mathbb{R}) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R})$ und $g' \in L^\infty(\mathbb{R})$ folgen $g \in L^1(\mathbb{R})$ und $g' \in L^2(\mathbb{R})$, d.h. a) und b) sind gezeigt.

Für c) argumentiert man ähnlich.

Seien nun $f \in A$ und $g \in B$. Da nach der 1. Behauptung $f, g \in H^1(\mathbb{R})$ sind, kann man Lemma 8.2 anwenden und erhält

$$\begin{aligned}(f, \Omega^+ g) &= \lim_{t \to -\infty} (f, e^{iHt} e^{-iH_0 t} g) = \lim_{t \to -\infty} \int_0^t (f, e^{iHs} e^{-iH_0 s} g)' ds + (f, g) \\ &= i \lim_{t \to -\infty} \int_0^t q(e^{-iHs} f, e^{-iH_0 s} g) \, ds + (f, g). \end{aligned} \tag{8.9}$$

Um das uneigentliche Integral als Abelschen Limes schreiben zu können, benötigt man die 2. Behauptung :

Es ist $q(e^{-iH(\cdot)} f, e^{-iH_0(\cdot)} g)$ in $\mathbb{R}$ beschränkt.

Beweis :

Es ist nach Lemma 8.3 c) mit einem geeigneten $c > 0$

$$\left| q(e^{-iHt} f, e^{-iH_0 t} g) \right| \leq c \left\| e^{-iHt} f \right\|_{h_0}^2 \left\| e^{-iH_0 t} g \right\|_{h_0}^2 \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Sei $\gamma+1$ untere Schranke von h_0. Dann ist mit dem Funktionalkalkül

$$\left\| e^{-iH_0t} g \right\|_{h_0}^2 = \int_{\mathbb{R}} (E-\gamma)\, d(e^{-iH_0t} g, P_E^0 e^{-iH_0t} g)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} (E-\gamma)\, d(e^{-iH_0t} g, e^{-iH_0t} P_E^0 g) \;= \|\, g \,\|_{h_0}.$$

Wegen der Äquivalenz von $\|\ \ \|_{h_0}$ und $\|\ \ \|_h$ (Lemma 8.3 b)) kann man mit dem

analogen Argument auch die Beschränktheit des anderen Faktors begründen.
Mit der 2.Behauptung und [S, Lemma V.I] folgt also aus (8.9)

$$(f, \Omega^+ g) = i \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_0^{-\infty} q(e^{-iHs} f, e^{-iH_0 s} g)\, e^{\epsilon s}\, ds + (f,g). \tag{8.10}$$

Mit Hilfe von Satz 7.3 läßt sich das Integral weiter umformen:

$$i \int_0^{-\infty} q(e^{-iHs} f, e^{-iH_0 s} g)\, e^{\epsilon s}\, ds = i \int_0^{-\infty} q(F^{\geq *} e^{-i(\cdot)s} F^{\geq} f, e^{-iH_0 s} g)\, e^{\epsilon s}\, ds$$

$$= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{-\infty} ds \int_{\mathbb{R}} dx\, Q(x) \left(\int_M \overline{dE\, \psi_-^{\geq}(x,E) e^{-iEs} F_-^{\geq} f(E) + \psi_+^{\geq}(x,E) e^{-iEs} F_+^{\geq} f(E)} \right) \times$$

$$\times (e^{-iH_0 s} g)(x)\, e^{\epsilon s}, \tag{8.11}$$

wobei sich im letzten Schritt wegen $F_{\pm}^{\geq} f \in C_0^\infty(M)$ die Gleichung (7.11) verwenden ließ.
Um nun den Satz von Fubini anwenden zu können, überlegt man sich zunächst, daß mit Korollar 7.4 und wegen des kompakten Trägers von $F_{\pm} g$ gilt

$$\left| e^{-iH_0 s} g(x) \right| = \left| \int_M dE \left(u_-(x,E) e^{-iEs} F_- g(E) + u_+(x,E) e^{-iEs} F_+ g(E) \right) \right|$$

$$\leq \left(\sup_{x \in \mathbb{R}, E \in supp\ (F_- g)} (|u_-(x,E)|) \int_M |F_- g| \right) \left(\sup_{x \in \mathbb{R}, E \in supp\ (F_+ g)} (|u_+(x,E)|) \int_M |F_+ g| \right),$$

d.h. es ist $e^{-iH_0(\cdot)} g(\cdot)$ beschränkt. Da weiterhin gelten $Q \in L^1(\mathbb{R})$,

$\psi^{\gtrless}_{\pm} \in L^\infty(\mathbb{R} \times supp\ (F^{\gtrless}_{\pm} f))$, $e^{\epsilon(\,\cdot\,)} \in L^1((-\infty, 0])$ und $F^{\gtrless}_{\pm} f \in C_0^\infty(M) \subset L^1(M)$, ist der Integrand von (8.11) in $L^1((-\infty,0] \times \mathbb{R} \times M)$, und es folgt

$$i\int_0^{-\infty} q(e^{-iHs}f, e^{-iH_0 s}g)\, e^{\epsilon s}\, ds =$$

$$= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_M dE \int_{\mathbb{R}} dx \int_0^{-\infty} ds\, \overline{F^{\gtrless}_{-} f(E)}\, Q(x) \left(e^{-i(H_0 - (E - i\epsilon))s} g)(x)\right) \overline{\psi^{\gtrless}_{-}(x,E)} \; +$$

$$+ \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_M dE \int_{\mathbb{R}} dx \int_0^{-\infty} ds\, \overline{F^{\gtrless}_{+} f(E)}\, Q(x) \left(e^{-i(H_0 - (E - i\epsilon))s} g)(x)\right) \overline{\psi^{\gtrless}_{+}(x,E)}. \tag{8.12}$$

Um das innere Integral auszurechnen, verwendet man wieder Korollar 7.4 :

$$\int_0^{-\infty} ds \left(e^{-i(H_0 - (E - i\epsilon))s} g)(x)\right) =$$

$$= \int_0^{-\infty} ds \int_M d\lambda \left(u_-(x,\lambda) e^{-i(\lambda - (E - i\epsilon))s} F_- g(\lambda) + u_+(x,\lambda) e^{-i(\lambda - (E - i\epsilon))s} F_+ g(\lambda)\right)$$

$$= \int_M d\lambda \left(\int_0^{-\infty} ds\, e^{-i(\lambda - (E - i\epsilon))s} \right) \left(u_-(x,\lambda) F_- g(\lambda) + u_+(x,\lambda) F_+ g(\lambda)\right)$$

$$= \int_M d\lambda\, \frac{1}{-i(\lambda - (E - i\epsilon))} \left(u_-(x,\lambda) F_- g(\lambda) + u_+(x,\lambda) F_+ g(\lambda)\right)$$

$$= -i(R_0(E - i\epsilon)g)(x) = -i\int_{\mathbb{R}} R_0^{\lessgtr}(x,y,E - i\epsilon) g(y)dy$$

$$= -i\int_{\mathbb{R}} \overline{R_0^{\gtrless}(x,y,E + i\epsilon)} g(y)dy \qquad\qquad (x \in \mathbb{R}),$$

wobei im zweiten Schritt wegen $u_\pm \in L^\infty(\mathbb{R} \times supp\ (F_\pm g))$, $e^{\epsilon(\,\cdot\,)} \in L^1((-\infty,0])$ und $F_\pm g \in C_0^\infty(M) \subset L^1(M)$ der Satz von Fubini angewendet werden durfte, und im letzten Schritt die Gleichung (7.5) für den Kern des Adjungierten der Resolvente verwendet wurde. Damit ergibt sich aus (8.12) und (8.10)

$$(f,\Omega^+ g)-(f,g)=$$

$$=\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\epsilon\downarrow 0}\int_M dE \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dy\ \overline{F^{\geq}_{-} f(E)}\ Q(x)\ \overline{R_0^{\geq}(x,y,E+i\epsilon)}\ g(y)\ \overline{\psi^{\geq}_{-}(x,E)}\ +$$

$$+\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\epsilon\downarrow 0}\int_M dE \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dy\ \overline{F^{\geq}_{+} f(E)}\ Q(x)\ \overline{R_0^{\geq}(x,y,E+i\epsilon)}\ g(y)\ \overline{\psi^{\geq}_{+}(x,E)}.$$

Nun soll der Grenzwert gebildet werden. Satz 6.4 1) liefert punktweise Konvergenz und die Beschränktheit von $R_0^{\geq}$. Mit $F^{\geq}_{\pm} f \in C_0^\infty(M) \subset L^1(M)$, $Q,g \in L^1(\mathbb{R})$ und $\psi^{\geq}_{\pm} \in L^\infty(\mathbb{R}\times supp\ (F^{\geq}_{\pm} f))$ kann man den Satz über majorisierte Konvergenz und anschließend den Satz von Fubini anwenden:

$$(f,\Omega^+ g)-(f,g)=\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_M dE \int_{\mathbb{R}} dy \int_{\mathbb{R}} dx\ \overline{F^{\geq}_{-} f(E)}\ g(y)\ Q(x)\ \overline{R_0^{\geq}(x,y,E)}\ \overline{\psi^{\geq}_{-}(x,E)}\ +$$

$$+\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_M dE \int_{\mathbb{R}} dy \int_{\mathbb{R}} dx\ \overline{F^{\geq}_{+} f(E)}\ g(y)\ Q(x)\ \overline{R_0^{\geq}(x,y,E)}\ \overline{\psi^{\geq}_{+}(x,E)}.$$

Mit der LSGL (Satz 7.1 a)) folgt

$$(f,\Omega^+ g)-(f,g)=\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_M dE \int_{\mathbb{R}} dy \Big(\ \overline{F^{\geq}_{-} f(E)}\ g(y)\ (\overline{u_-(y,E)} - \overline{\psi^{\geq}_{-}(y,E)}) +$$

$$+\ \overline{F^{\geq}_{+} f(E)}\ g(y)\ (\overline{u_+(y,E)} - \overline{\psi^{\geq}_{+}(y,E)})\Big).$$

$$= \int_M \Big(\overline{F^{\geq}_{-} f}\ (F_- g - F^{\geq}_{-} g) + \overline{F^{\geq}_{+} f}\ (F_+ g - F^{\geq}_{+} g)\Big)$$

$$= (F^{\geq} f, Fg) - (F^{\geq} f, F^{\geq} g)$$

$$= (F^{\geq} f, Fg) - (f,g).$$

Mit der Bemerkung am Anfang des Beweises ist alles gezeigt. □

Literatur

[A] AGMON, Shmuel.
Spectral Properties of Schrödinger Operators and Scattering Theory
S. 151 - 218; aus: Annali della Scuola Norm. Sup. di Pisa
Pisa 1975

[B] BENTOSELA, F..
Scattering from Impurities in a Crystal
S. 153 - 166; aus: Commum. math. Phys. 46
Berlin, Heidelberg 1976

[C\S] CHADAN, K. und SABATIER, P. C..
Inverse Problems in Quantum Scattering Theory
New York 1989

[E] EASTHAM, M. S. P..
The Spectral Theory of Periodic Differential Equations
Edinburgh, London 1973

[J\R] JÖRGENS, Konrad und RELLICH, Franz.
Eigenwerttheorie gewöhnlicher Differentialgleichungen
Berlin, Heidelberg 1976

[H] HELLWIG, Günter.
Differentialoperatoren der mathematischen Physik
Berlin, Göttingen, Heidelberg 1964

[K] KATO, Tosio.
Peturbation Theory for Linear Operators
Berlin, Heidelberg 1976

[M] MARKUSHEVICH, A. I..
Theory of Functions of a Complex Variable
New York 1977

[P\T] PÖSCHEL, Jürgen und TRUBOWITZ, Eugene.
Inverse Spectral Theory
Boston 1987

[R] RUDIN, Walter.
Real and Complex Analysis
London 1970

[R\S-I] REED, Michael und SIMON, Barry.
Methods of Modern Mathematical Physics
I: Functional Analysis
New York, London 1972

[R\S-II] REED, Michael und SIMON, Barry.
Methods of Modern Mathematical Physics
II: Fourier Analysis, Self-Adjointness
New York, London 1975

[R\S-III] REED, Michael und SIMON, Barry.
Methods of Modern Mathematical Physics
III: Scattering Theory
New York, London 1979

[R\S-IV] REED, Michael und SIMON, Barry.
Methods of Modern Mathematical Physics
IV: Analysis of Operators
New York, London 1978

[S] SIMON, Barry.
Quantum Mechanics for Hamiltonians Defined as Quadratic Forms
Princeton 1971

[T] THOMAS, Lawrence E..
Time Dependent Approach to Scattering from Impurities in a Crystal
S. 335 - 343; aus Commun. math. Phys. 33
Berlin, Heidelberg 1973